AUGUSTIN COȚA
MARTA RADÓ
ECATERINA KORTHY
MARIANA RĂDUȚIU
ELENA FELICIA POPA
FLORICA VORNICESCU

GEOMETRIE ȘI TRIGONOMETRIE

X

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

AUGUSTIN COȚA
ECATERINA KÜRTHY
ELENA FELICIA POPA

MARTA RADÓ
MARIANA RĂDUȚIU
FLORICA VORNICESCU

Matematică

Manual pentru clasa a X-a

Geometrie și trigonometrie



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI

Capitolul I

Suprafețe poligonale. Arii

Noțiunea de arie a unei figuri plane, ca și aceea de lungime a unui segment, își are originea în necesitatea practică de a compara mulțimi plane. Noțiunea de lungime a permis compararea segmentelor în sensul de a decide dacă un segment este „mai mare" decît alt segment. Aria va permite compararea (măsurarea) unor alte tipuri de mulțimi plane, numite uneori și suprafețe, în același sens, adică de a decide că o suprafață plană este „mai mare" decît alta. Pentru definirea ariei, la început ne vor fi necesare cunoștințe de geometrie referitoare la poligoanele convexe și interioarele acestora. Întrucît o prezentare riguroasă a tuturor noțiunilor și proprietăților care apar în acest capitol este laborioasă și dificil de făcut cu cunoștințele pe care le avem din clasa a IX-a, o parte a acestor proprietăți va fi acceptată fără demonstrații sau cu demonstrații facultative.

§ 1. Suprafețe poligonale

În cazul unui poligon convex, reamintim că interiorul acestuia (manual cl. a IX-a, cap. I, § 6) este intersecția semiplanelor deschise limitate de suporturile laturilor poligonului și care conțin vîrfurile nesituate pe laturile respective (fig. I.1). Pentru poligonul convex $L = P_1P_2...P_n$ situat în planul $\mathcal{P}$, interiorul poligonului se notează prin Int $P_1P_2...P_n$ = Int L. Mulțimea $L \cup$ Int L se numește *suprafață poligonală convexă* și se notează $[L] = L \cup$ Int L. Poligonul L se numește *frontiera* suprafeței poligonale $[L]$.

Suprafețele poligonale convexe permit definirea unei noțiuni mai generale:

Definiție. Se numește *suprafață poligonală* o mulțime de puncte din plan, care este reuniunea unui număr finit de suprafețe poligonale convexe, acestea avînd două cîte două interioarele disjuncte (fig. I.2).

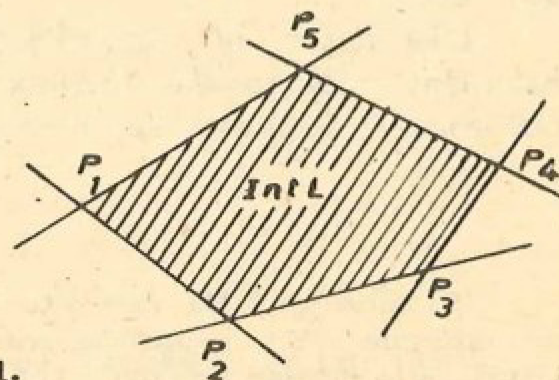


Fig. I.1.

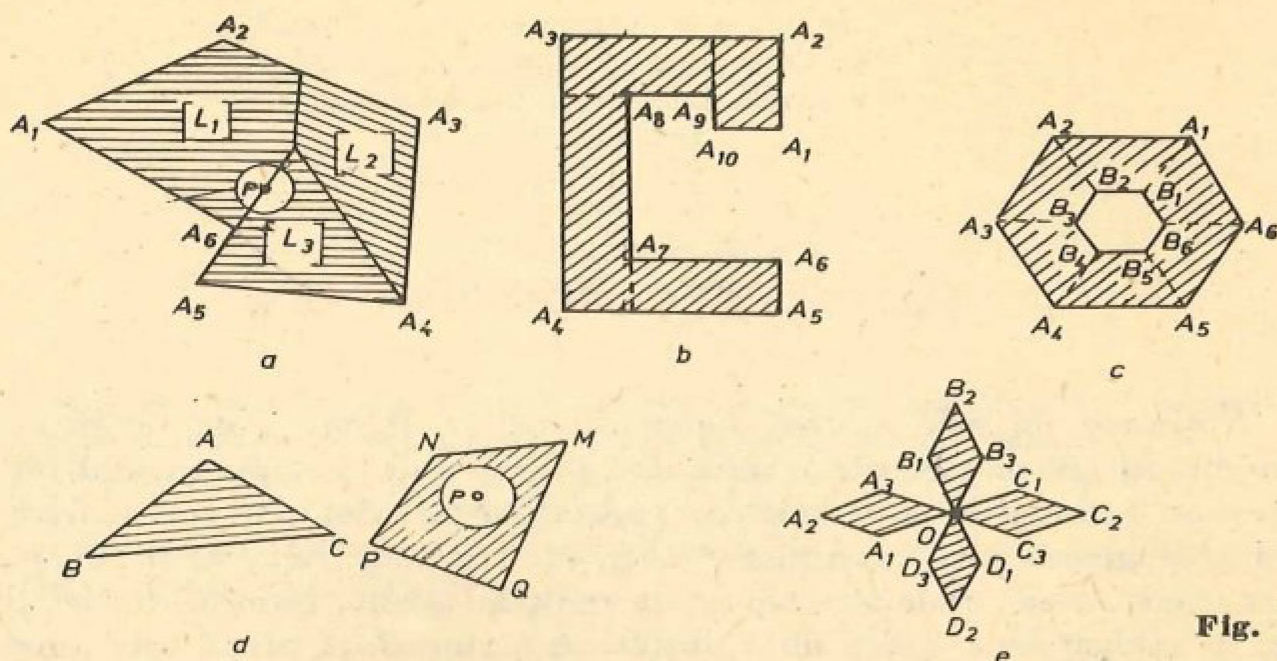


Fig. I.2.

Dacă S este o suprafață poligonală și $[L_1]$, $[L_2]$, ..., $[L_k]$ sînt suprafețele poligonale convexe respective, adică

$$S = [L_1] \cup [L_2] \cup \ldots \cup [L_k] \text{ și } \operatorname{Int} L_i \cap \operatorname{Int} L_j = \varnothing \text{ pentru } i \neq j,$$

atunci vom spune că mulțimea $\{[L_1], [L_2], \ldots, [L_k]\}$ constituie o *descompunere a suprafeței poligonale* S (fig. I.2).

Pentru suprafețele poligonale convexe s-a definit frontiera și interiorul. Vom defini aceste noțiuni și pentru celelalte suprafețe poligonale. Un punct P al unei suprafețe poligonale S se numește *punct interior* al lui S, dacă există un disc cu centrul P, inclus în S. Punctele lui S care nu sînt puncte interioare ale lui S formează *frontiera lui* S. Astfel, suprafețele poligonale din figura I.2 au următoarele frontiere: a) poligonul $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$; b) poligonul $A_1A_2...A_{10}$; c) poligoanele $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ și $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$; d) poligoanele ABC și $MNPQ$; e) poligoanele $A_1A_2A_3O$, $B_1B_2B_3O$, $C_1C_2C_3O$, $D_1D_2D_3O$.

Dacă frontiera suprafeței poligonale este un poligon, atunci suprafața va fi numită după numele poligonului; astfel se va spune: suprafață patrulateră, pentagonală etc. în loc de suprafață poligonală cu frontiera patrulater, pentagon etc.

Din definiție rezultă că orice suprafață poligonală se descompune în suprafețe poligonale convexe. În continuare vom arăta că orice suprafață poligonală convexă se descompune în suprafețe triunghiulare.

Teoremă. O suprafață poligonală convexă cu n laturi ($n > 3$) se descompune în $n - 2$ suprafețe triunghiulare.

Demonstrație. Se va arăta întîi că o suprafață poligonală convexă cu n laturi se descompune într-o suprafață triunghiulară și o suprafață poligonală convexă cu $n - 1$ laturi. Se consideră poligonul convex $L = P_1P_2 \ldots P_n$ și dreapta P_1P_3 (fig. I.3). O dreaptă

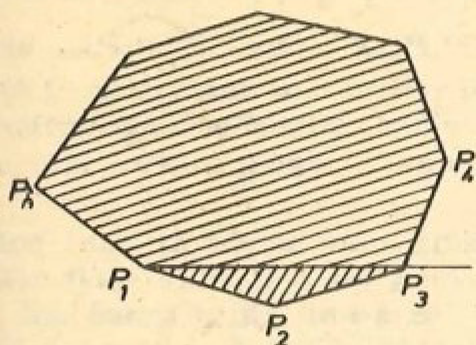


Fig. I.3.

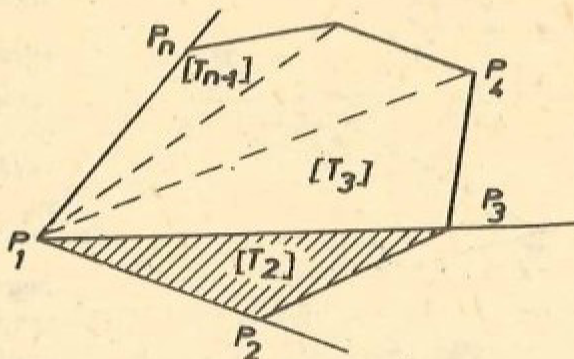


Fig. I.4.

care nu este suportul unei laturi a lui L are cel mult două puncte comune cu L, prin urmare dreapta P_1P_3 intersectează poligonul L numai în P_1 și P_3. Rezultă că punctele $P_4, P_5, ..., P_n$ sînt de aceeași parte a lui P_1P_3, ceea ce înseamnă că $P_1P_3P_4 ... P_n$ este un poligon convex. Deoarece P_3 se află în interiorul unghiului $\widehat{P_2P_1P_n}$ rezultă că P_2 și P_n se află de o parte și de alta a dreptei P_1P_3. Deci punctele P_2 și $P_4, P_5, ..., P_n$ se află în semiplane opuse față de P_1P_3, adică interiorul triunghiului $P_1P_2P_3$ și interiorul poligonului $P_1P_3P_4 ... P_n$ se află în semiplane opuse, avînd astfel intersecția vidă. Pe de altă parte este evident că $[L] = [P_1P_2P_3] \cup [P_1P_3P_4 ... P_n]$.

Aplicînd succesiv acest rezultat suprafețelor poligonale $[P_1P_3P_4...P_n]$, $[P_1P_4P_5...P_n]$ etc., care au fiecare cîte o latură mai puțin decît precedenta, se obține teorema.

Din demonstrație rezultă că suprafața poligonală convexă $[L] = [P_1P_2...P_n]$ se descompune în suprafețele triunghiulare $[T_2], [T_3], ..., [T_{n-1}]$ (fig. I.4) unde se notează cu T_i triunghiurile $P_1P_iP_{i+1}$, $i = 2, 3, ..., n-1$. Este evident că pentru o suprafață poligonală convexă există mai multe descompuneri în suprafețe triunghiulare.

Consecință. Orice suprafață poligonală poate fi descompusă în triunghiuri (fig. I.5).

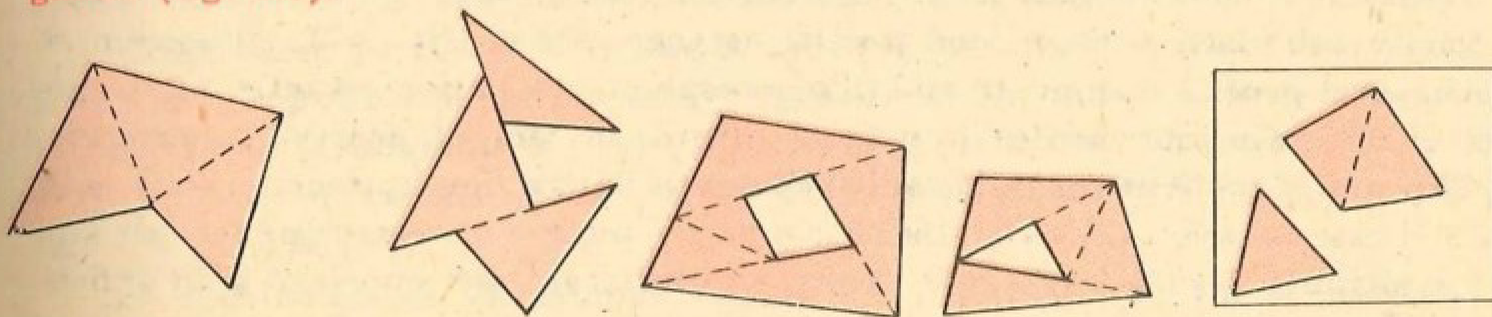


Fig. I.5.

Exerciții

1. Să se arate că suma măsurilor unghiurilor unui poligon convex cu n vîrfuri este $S_n = (n-2) \cdot 180°$.

2. Cîte laturi are un poligon regulat, dacă măsura unui unghi al său este 135°?

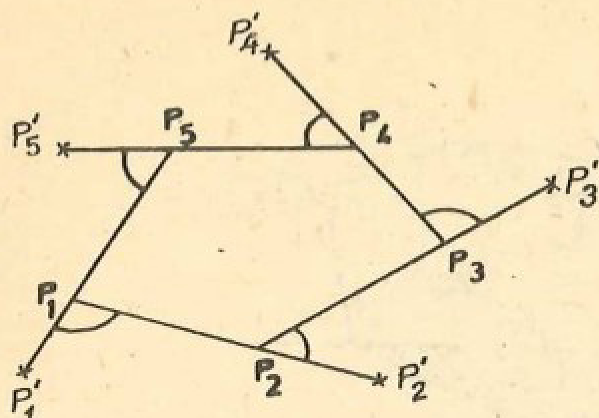


Fig. I.6.

3. Dacă $L = P_1P_2 \ldots P_n$ este un poligon convex și P_i' un punct pe semidreapta opusă lui $(P_iP_{i-1}$, atunci $\widehat{P_i'P_iP_{i+1}}$ se numește *unghi exterior al lui* L (fig. I.6). Să se arate că suma măsurilor unghiurilor exterioare ale unui poligon convex este egală cu $360°$.

4. Măsura unui unghi al unui poligon regulat este de 4 ori mai mare decît măsura unui unghi exterior. Cîte laturi are poligonul?

5. Cîte laturi are un poligon convex, dacă toate unghiurile sale exterioare sînt obtuze?

6.* Să se arate că într-un patrulater convex, bisectoarele a două unghiuri consecutive formează un unghi a cărui măsură este egală cu semisuma măsurilor celorlalte două unghiuri.

§ 2. Mulțimi congruente și mulțimi asemenea

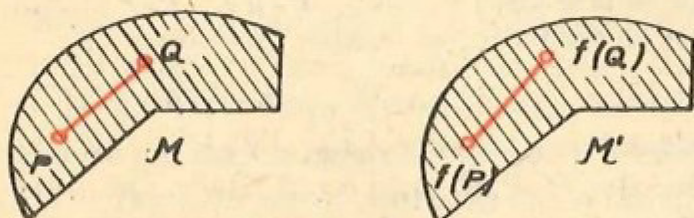


Fig. I.7.

Vom extinde în acest paragraf, noțiunile de congruență și asemănare, care în clasa a IX-a au fost definite numai pentru mulțimi particulare de puncte (segmente, unghiuri, triunghiuri).

Să ne imaginăm o placă situată pe o suprafață plană, care alunecă pe aceasta și să notăm prin **M** și **M'** mulțimile de puncte ale suprafeței plane situate sub placă pentru două poziții oarecare ale ei (fig. I.7). Observăm că prin acest procedeu se poate stabili o corespondență biunivocă între mulțimile **M** și **M'** prin intermediul punctelor plăcii. În timpul acestei „alunecări", placa am considerat-o rigidă, adică distanța dintre două puncte fixe A și B ale ei este constantă, deci și distanțele dintre imaginile acestor puncte situate în mulțimile **M** și **M'** sînt egale. Această proprietate este cuprinsă și în aplicația următoare:

Aplicație. Să se arate că dacă $[AB] \equiv [A'B']$ atunci există o funcție bijectivă $f : [AB] \to [A'B']$ astfel că oricare ar fi două puncte $P, Q \in [AB]$, $PQ = f(P)f(Q)$ și reciproc.

* Problema notată cu steluță se adresează cercurilor de elevi.

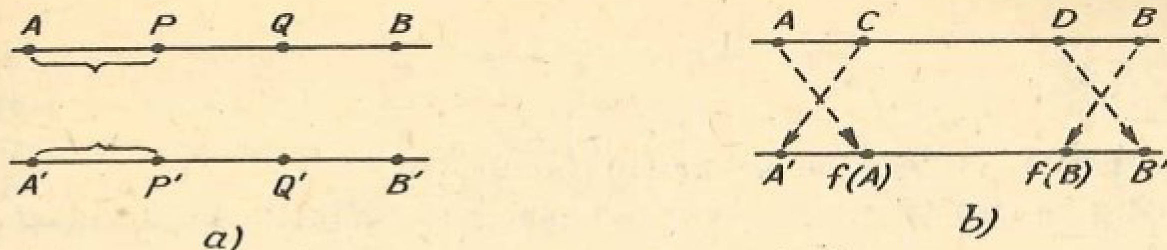


Fig. I.8.

Rezolvare. 1) Se presupune că $[AB] \equiv [A'B']$ şi fiecărui punct $P \in [AB]$ i se asociază punctul $P' \in [A'B']$ pentru care $AP = A'P'$. Din teorema de construcţie a unui segment (manual cl. a IX-a) rezultă că funcţia $f : [AB] \to [A'B']$ definită prin $f(P) = P'$ este o bijecţie între $[AB]$ şi $[A'B']$. Trebuie arătat că $f(P)f(Q) = PQ$ pentru orice $P, Q \in [AB]$. Putem admite că $P \in [AQ]$. Atunci avem

$$PQ = AQ - AP = A'Q' - A'P' = P'Q' = f(P)f(Q).$$

2) Să demonstrăm că, reciproc, dacă funcţia bijectivă $f : [AB] \to [A'B']$ are proprietatea că $f(P)f(Q) = PQ$ pentru orice $P, Q \in [AB]$, atunci $AB = A'B'$. Deoarece funcţia f este surjectivă, există punctele $C, D \in [AB]$ astfel ca $f(C) = A'$ şi $f(D) = B'$ şi conform ipotezei $A'B' = CD$. Pentru a arăta că $C = A$ sau $C = B$, presupunem contrariul; atunci pe de o parte $AB > CD = A'B'$ şi pe de altă parte $AB = f(A)f(B) \leqslant A'B'$ (căci segmentul $(f(A)f(B))$ este inclus în $(A'B')$). Am obţinut o contradicţie, deci $C = A$ sau $C = B$. În mod analog, dacă $C = A$ se arată că $D = B$, iar dacă $C = B$ atunci $D = A$. Deci $f(A) = A'$ şi $f(B) = B'$ sau $f(B) = A'$ şi $f(A) = B'$ (fig. I.8). Dar atunci $A'B' = f(A)f(B) = AB$, prin urmare $(AB) \equiv (A'B')$.

Definiţie. Mulţimile $\mathbf{M}$ şi $\mathbf{M}'$ se numesc *congruente* şi se notează $\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}'$ dacă există o funcţie bijectivă $f : \mathbf{M} \to \mathbf{M}'$ astfel ca pentru oricare două puncte $P, Q \in \mathbf{M}$, $PQ = f(P)f(Q)$. Funcţia f cu această proprietate se numeşte *izometrie*.

Mai scurt, se poate spune că două mulţimi sînt congruente dacă există o corespondenţă biunivocă între ele care păstrează distanţele.

Următoarea proprietate, evidentă intuitiv, se admite fără demonstraţie: „dacă două suprafeţe poligonale sînt congruente şi una din ele este descompusă în suprafeţele triunghiulare $[T_1], [T_2], \ldots, [T_n]$, atunci şi cealaltă admite o descompunere în acelaşi număr de suprafeţe triunghiulare $[T'_1], [T'_2], \ldots, [T'_n]$ astfel ca $[T_i] \equiv [T'_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

În continuare se va extinde noţiunea de asemănare a două mulţimi, care a fost definită în clasa a IX-a pentru poligoane convexe. În mod intuitiv, aceasta se poate face prin observarea a două hărţi ale aceleiaşi regiuni, executate la scări diferite. Dacă se compară distanţele dintre oricare două puncte ale uneia dintre hărţi cu distanţele dintre punctele corespunzătoare ale celeilalte se constată că raportul acestora este constant. Această observaţie este exprimată şi în următoarea:

Proprietate. Dacă $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, atunci există un număr $k > 0$ şi o funcţie bijectivă $f: ABC \to A'B'C'$, astfel încît oricare ar fi două puncte $P, Q \in ABC$, $PQ = k \cdot f(P)f(Q)$ şi reciproc.

Demonstraţia se lasă ca exerciţiu facultativ.

În baza proprietăţii de mai sus, se justifică definiţia ce urmează.

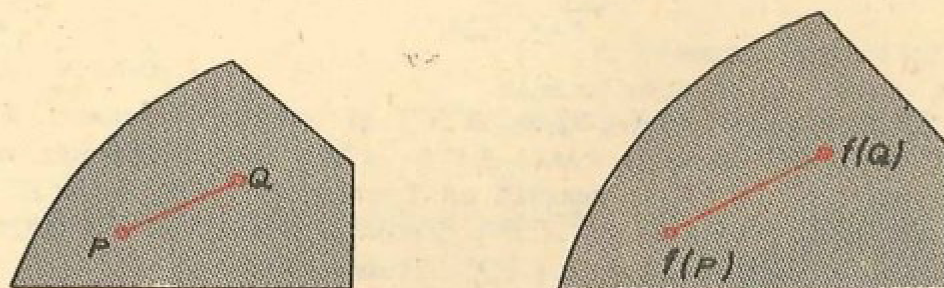


Fig. I.9.

Definiţie. Mulţimile M şi M′ se numesc *asemenea* şi se notează $M \sim M'$ dacă există un număr $k > 0$ şi o funcţie bijectivă $f: M \to M'$ astfel ca pentru oricare două puncte $P, Q \in M$, $PQ = k \cdot f(P)f(Q)$. Funcţia f cu această proprietate se numeşte *asemănare*, iar numărul k se numeşte raport de asemănare (fig. I.9).

Ca şi în cazul mulţimilor congruente, se va admite următoarea proprietate: „dacă două suprafeţe poligonale sînt asemenea, k fiind raportul de asemănare şi una din ele se descompune în suprafeţele triunghiulare $[T_1]$, $[T_2]$, ..., $[T_n]$ atunci şi cealaltă admite o descompunere în acelaşi număr de suprafeţe triunghiulare $[T'_1]$, $[T'_2]$, ..., $[T'_n]$ astfel ca $[T_i] \sim [T'_i]$, $i = 1, 2, ..., n$, raportul de asemănare fiind tot k (fig. I.10).

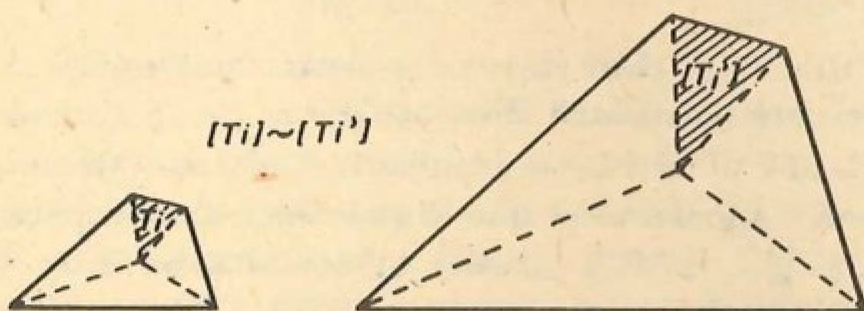


Fig. I.10.

Exerciţii

1. Să se arate că oricare două semidrepte sînt mulţimi congruente. Aceeaşi proprietate pentru drepte.

2. Să se arate că raportul perimetrelor a două poligoane asemenea este egal cu raportul lor de asemănare.

§ 3. Aria suprafeţelor poligonale

Deoarece, după cum s-a arătat la începutul acestui capitol, aflarea ariei unei mulţimi de puncte este o operaţie de măsurare, este necesară introducerea unei unităţi de măsură.

O suprafaţă pătrată de latură 1 se va numi *unitate de suprafaţă*.

Se poate măsura în mod direct o suprafaţă poligonală E, dacă E se descompune într-un număr finit de unităţi de suprafaţă (fig. I.11). Pentru alte mulţimi, procedeul direct de măsurare nu se poate aplica. Deoarece orice suprafaţă poligonală se descompune în suprafeţe triunghiulare, rezultă că este esenţial să se poată calcula aria unei suprafeţe triunghiulare. Înainte însă, este necesară definirea ariei. Pentru mulţimea $\mathcal{S}$ a suprafeţelor poligonale, aria se defineşte prin următoarea teoremă care se va admite fără demonstraţie:

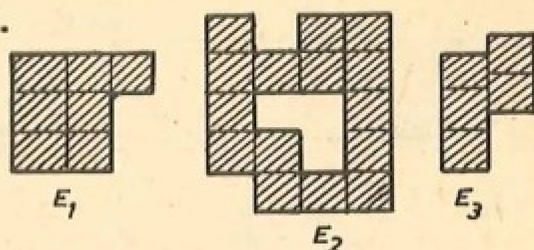


Fig. I.11.

Teorema 1. (Teorema de existenţă a funcţiei arie.) Există o funcţie $\sigma : \mathcal{S} \to \mathbf{R}_+$ care are următoarele proprietăţi:

1) dacă triunghiurile T_1 şi T_2 sînt congruente atunci $\sigma[T_1] = \sigma[T_2]$,

2) dacă S_1 şi S_2 sînt suprafeţe poligonale cu interioarele disjuncte atunci $\sigma(S_1 \cup S_2) = \sigma(S_1) + \sigma(S_2)$,

3) dacă U este o unitate de suprafaţă atunci $\sigma(U) = 1$.

Prin definiţie, funcţia cu proprietăţile (1) — (3) se numeşte *funcţie arie*, iar numărul $\sigma(S)$, *aria suprafeţei poligonale* S. Deoarece două suprafeţe poligonale congruente se descompun în suprafeţe triunghiulare congruente două cîte două, din proprietăţile (1) şi (2) rezultă că *două suprafeţe poligonale congruente au arii egale*. În condiţia (3) intervine U, o suprafaţă pătrată de latura 1. Ea este fixată, deoarece în tratarea noastră, funcţia-distanţă este aleasă în mod unic (prin fixarea de la început a distanţei 1, a „etalonului"). În practică însă, e necesar să se înlocuiască U cu diferite „unităţi de suprafaţă": 1 cm², 1 dm², 1 m², 1 dam² etc. Atunci se obţin *diferite funcţii-arie* şi în acest caz se indică funcţia respectivă printr-un indice, de exemplu: σ_{cm^2}, iar în loc de $\sigma_{cm^2}(S) = 5{,}7$ se scrie $\sigma(S) = 5{,}7$ cm² (în acord cu notaţia $AB = 5$ cm care exprimă că $AB_{cm} = 5$).

În continuare vom arăta cum se calculează valorile funcţiei pentru unele suprafeţe poligonale dintre care un rol deosebit îl are aria suprafeţei triunghiulare. Pentru simplificarea exprimării vom spune: „aria triunghiului, pătratului etc.", în loc de „aria suprafeţei triunghiulare, pătrate etc." iar pentru simplificarea notaţiei, dacă $[L]$ este o suprafaţă poligonală în loc de „$\sigma([L])$" se va scrie „$\sigma[L]$", de exemplu $\sigma[ABC]$ reprezintă aria suprafeţei triunghiulare $[ABC]$.

Teorema 2. Dacă $ABCD$ este pătrat şi $AB = l$, atunci $\sigma[ABCD] = l^2$.

Demonstraţie. Se va face în trei etape:

a) Dacă $l = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$, atunci $\sigma[ABCD] = \frac{1}{n^2}$. Pe semidreptele $(AB$ şi $(AD$ (fig. I.12) se iau punctele B' şi D' astfel încît $AB' = AD' = 1$ şi

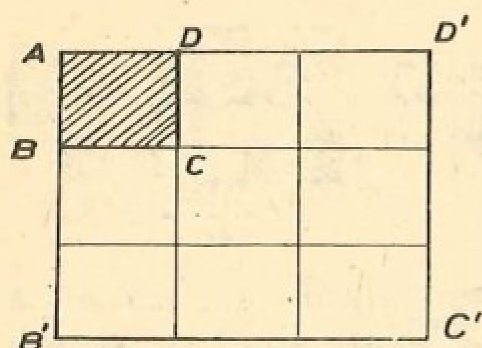


Fig. I.12.

se construiește pătratul $AB'C'D'$ pentru care $\sigma[AB'C'D'] = 1$. Se împart segmentele $[AB']$ și $[AD']$ în n segmente congruente și prin punctele de diviziune se duc paralele la AD respectiv AB, formîndu-se astfel n^2 pătrate congruente. Deoarece oricare două dintre aceste pătrate au interioarele disjuncte, din proprietatea (2) rezultă că $\sigma[AB'C'D'] = n^2 \cdot \sigma[ABCD]$ sau $\sigma[ABCD] = \frac{1}{n^2}$.

b) Dacă $l = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbf{N}^*$, atunci $\sigma[ABCD] = \frac{m^2}{n^2}$. Se împart segmentele $[AB]$ și $[AD]$ (fig. I.13) în m segmente congruente și ducîndu-se paralele cu laturile pătratului, prin punctele de diviziune, se obțin m^2 pătrate congruente cu latura de lungime $\frac{1}{n}$. Din proprietățile (1) și (2) și cazul a) rezultă că $\sigma[ABCD] = m^2 \cdot \frac{1}{n^2}$.

c) Dacă $l \in \mathbf{R}_+^* - \mathbf{Q}_+^*$ atunci $\sigma[ABCD] = l^2$. Se raționează prin reducere la absurd. Să presupunem, deci, că $\sigma[ABCD] = \alpha$ și $\alpha < l^2$. Atunci $\sqrt{\alpha} < l$ și există un număr rațional β astfel încît $\sqrt{\alpha} < \beta < l$. Vom construi pătratul $AB'C'D'$ cu $AB' = \beta$, $B' \in (AB)$, $D' \in (AD)$ (fig. I.14). Avem $\sigma[AB'C'D'] = \beta^2$. Deoarece $[ABCD]$ este reuniunea suprafețelor poligonale $[AB'C'D']$ și $[B'BCDD'C']$, cu interioarele disjuncte, rezultă că $\sigma[ABCD] = \sigma[AB'C'D'] + \sigma[B'BCDD'C'] > \sigma[AB'C'D']$ sau $\alpha > \beta^2$, adică $\sqrt{\alpha} > \beta$, ceea ce este în contradicție cu modul de alegere a lui β. Dacă se presupune $\alpha > l^2$, se obține o contradicție în mod analog, de unde rezultă că $\sigma[ABCD] = l^2$,

Teorema 3. Dacă $ABCD$ este dreptunghi și $AB = a$, $BC = b$, atunci $\sigma[ABCD] = a \cdot b$.

Demonstrație. Se construiește pătratul $AB'C'D'$ (fig. I.15) astfel încît $AB' = a + b$, $B \in (AB')$, $D \in (AD')$, deci $\sigma[AB'C'D'] = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot b$. Fie $\{E\} = CD \cap B'C'$ și $\{F\} = BC \cap D'C'$; atunci

Fig. I.13.

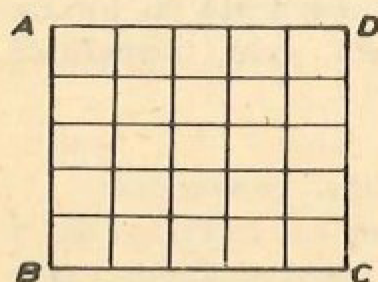


Fig. I.14.

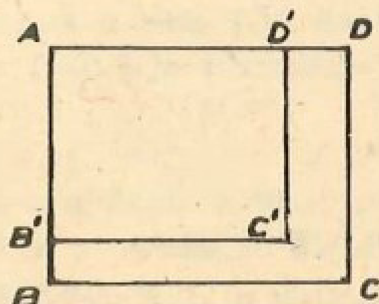
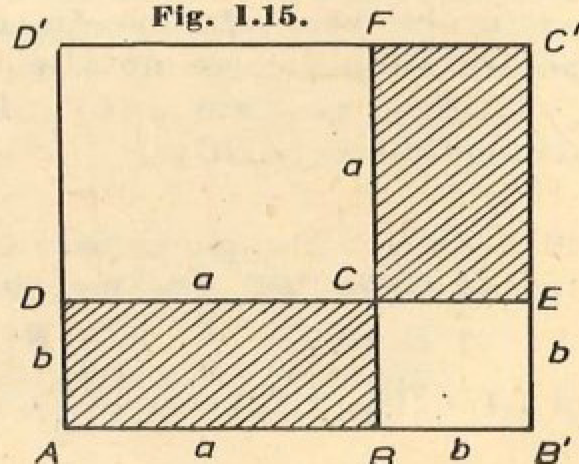


Fig. I.15.



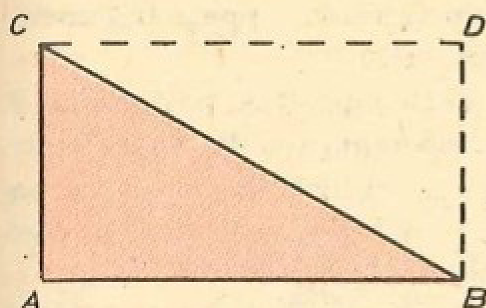


Fig. I.16.

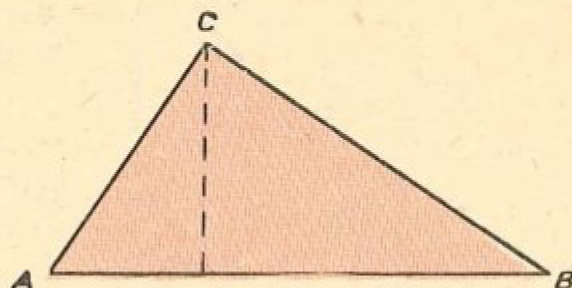


Fig. I.17.

$DCFD'$ și $BB'EC$ sînt pătrate, $DC = a$, $BC = b$, iar dreptunghiul $CEC'F$ este congruent cu $ABCD$ și $\sigma[AB'C'D'] = \sigma[DCFD'] + \sigma[BB'EC] + 2\sigma[ABCD] = a^2 + b^2 + 2\sigma[ABCD]$. Din cele două expresii ale lui $\sigma[AB'C'D']$ rezultă că $\sigma[ABCD] = a \cdot b$.

Consecință. Dacă ABC este un triunghi dreptunghic cu unghiul drept în A atunci $\sigma[ABC] = \frac{1}{2} AB \cdot AC$.

Demonstrație. Se consideră punctul D astfel ca $ABCD$ să fie dreptunghi. Suprafața dreptunghiulară $[ABDC]$ se descompune în două suprafețe triunghiulare congruente $[ABC]$ și $[BDC]$ (fig. I.16). Deci

$$\sigma[ABC] = \frac{1}{2}\sigma[ABDC] = \frac{1}{2} AB \cdot AC.$$

Teorema 4. Aria unui triunghi este $\frac{1}{2}$ din produsul lungimii unei laturi cu înălțimea corespunzătoare.

Demonstrație. Se consideră triunghiul ABC în care se presupune că unghiurile A și B sînt ascuțite, deci C', piciorul înălțimii din C, este pe segmentul (AB) (fig. I.17). Atunci:

$$\sigma[ABC] = \sigma[ACC'] + \sigma[BCC'] = \frac{1}{2} AC' \cdot CC' + \frac{1}{2} C'B \cdot CC' = \frac{1}{2} AB \cdot CC'.$$

Deoarece orice triunghi are două unghiuri ascuțite și produsele dintre lungimea unei laturi cu înălțimea corespunzătoare egale, rezultă teorema.

Observație. Dacă o suprafață poligonală S se descompune în suprafețele poligonale $S_1, S_2, \ldots, S_n$, atunci ea se descompune și în suprafețele poligonale $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{n-1}$ și S_n. Din proprietatea (2) a teoremei 1 rezultă că:

$$\sigma(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n) = \sigma(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{n-1}) + \sigma(S_n).$$

Aplicînd succesiv această proprietate se obține:

$\sigma(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{n-1}) = \sigma(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{n-2}) + \sigma(S_{n-1}), \ldots,$
$\sigma(S_1 \cup S_2) = \sigma(S_1) + \sigma(S_2)$, ceea ce implică
$\sigma(S) = \sigma(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n) = \sigma(S_1) + \sigma(S_2) + \ldots + \sigma(S_n).$

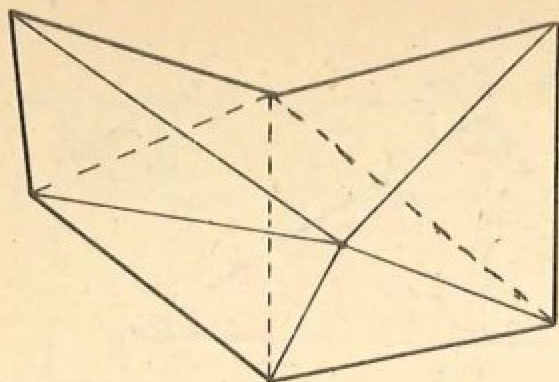


Fig. I.18.

Deci proprietatea (2) din teorema 1 poate fi generalizată în acest mod (fig. I.18).

Dacă pentru aceeaşi suprafaţă poligonală S se mai consideră o descompunere în suprafeţele poligonale $S'_1, S'_2, \ldots, S'_p$, atunci în mod analog se obţine $\sigma(S) = \sigma(S'_1) + \sigma(S'_2) + \ldots + \sigma(S'_p)$, deci

$$\sigma(S_1) + \sigma(S_2) + \ldots + \sigma(S_n) =$$
$$= \sigma(S'_1) + \sigma(S'_2) + \ldots + \sigma(S'_p).$$

Consecinţe.

1. Dacă $ABCD$ este un paralelogram şi $d(AB, CD) = h$ atunci $\sigma[ABCD] = AB \cdot h$ (fig. I.19).

2. Dacă $ABCD$ este trapez, $AB \parallel CD$ şi $d(AB, CD) = h$, atunci

$$\sigma[ABCD] = \frac{AB + CD}{2} \cdot h \text{ (fig. I.20)}.$$

3. Dacă $P_1P_2 \ldots P_n$ este un poligon convex regulat, O fiind centrul său şi $P_1P_2 = l$, $d(O, P_1P_2) = a$, atunci:

$$\sigma[P_1P_2 \ldots P_n] = \frac{1}{2} n \cdot a \cdot l \text{ (fig. I.21)}.$$

Demonstraţiile rezultatelor de mai sus constituie exerciţii simple, construcţiile necesare fiind indicate în figurile respective.

4. Dacă $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, k fiind raportul de asemănare, atunci $\frac{\sigma[ABC]}{\sigma[A'B'C']} = k^2$ (fig. I.22).

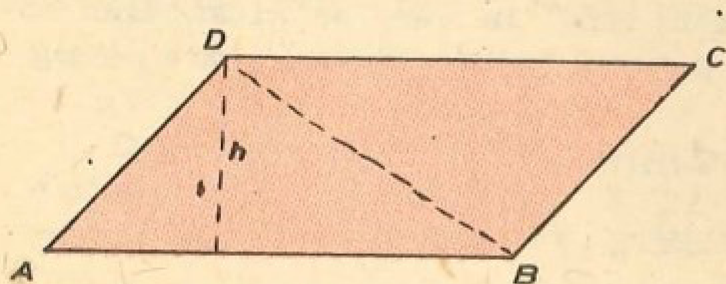


Fig. I.19.

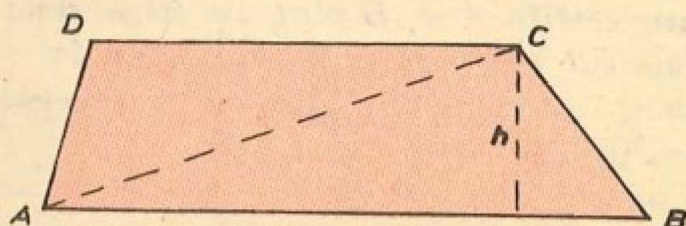


Fig. I.20

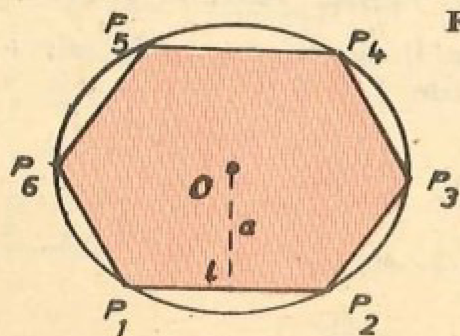
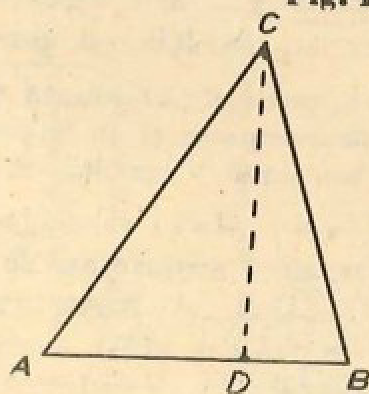


Fig. I.21.



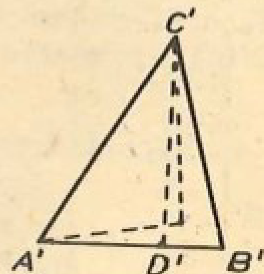
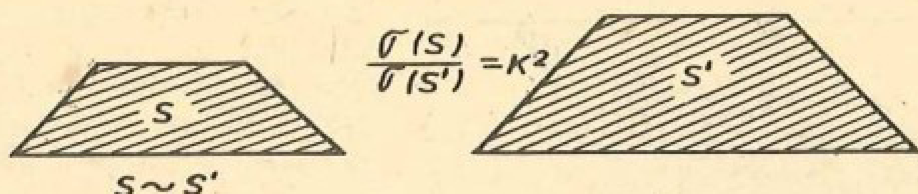


Fig. I.22.

Fig. I.23.



Demonstrație. Fie $CD \perp AB$, $D \in AB$, $C'D' \perp A'B'$, $D' \in A'B'$. Avem $\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$ și $\triangle BCD \sim \triangle B'C'D'$ deoarece aceste triunghiuri au respectiv cîte două unghiuri congruente. Rezultă

$$\frac{CD}{C'D'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = k, \text{ deci } \frac{\sigma[ABC]}{\sigma[A'B'C']} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot CD}{\frac{1}{2}A'B' \cdot C'D'} = k^2.$$

Rezultă acum, ținînd cont de proprietățile de descompunere că:

5. Raportul ariilor a două suprafețe poligonale asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare (fig. I.23).

Aplicații. Proprietățile ariei pot fi utile la demonstrarea unor relații geometrice și la rezolvarea unor probleme, chiar dacă aria nu apare în mod explicit. Vom arăta mai întîi două demonstrații ale teoremei lui Pitagora, bazate pe arii.

1. Se dă triunghiul ABC, dreptunghic în A, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $b > c$ (fig. I.24). Construim pătratele $ACDE$ și $EFGH$ cu laturile b respectiv c, $E \in (AB$, $F \in (ED)$, și punctul K astfel ca $D \in (FK)$ și $DK = c$. Atunci $\triangle ABC \equiv \triangle DKC \equiv \triangle HGB \equiv \triangle FGK$ și $BCKG$ este un pătrat de latură a. Rezultă:

$$b^2 + c^2 = \sigma[ACDE] + \sigma[EFGH] = \sigma[ACDFGH] = \sigma[CBGFD] +$$
$$+ \sigma[ABC] + \sigma[HGB] = \sigma[CBGFD] + \sigma[DKC] + \sigma[FGK] = \sigma[BCKG] = a^2.$$

2. Fie $[AD]$ înălțimea triunghiului ABC cu $m(\hat{A}) = 90°$ (fig. I.25). Deoarece $\triangle ABC \sim \triangle DAC \sim \triangle DBA$, avem conform consecinței 4

$$\frac{\sigma[ABC]}{a^2} = \frac{\sigma[DAC]}{b^2} = \frac{\sigma[DBA]}{c^2} = \frac{\sigma[DAC] + \sigma[DBA]}{b^2 + c^2}.$$

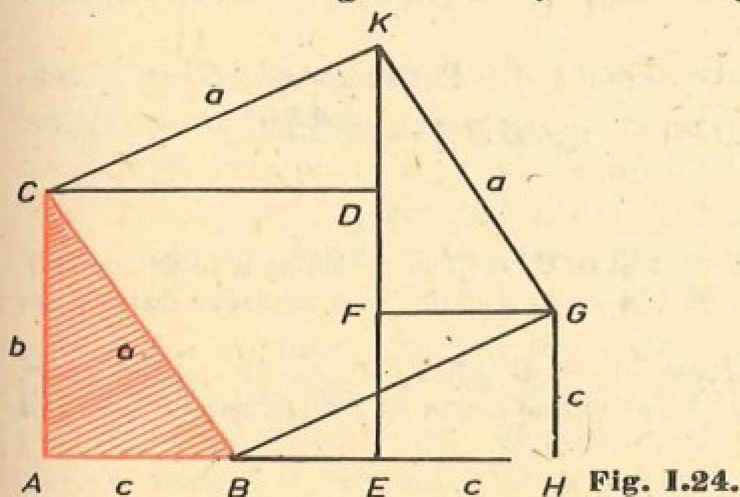


Fig. I.24.

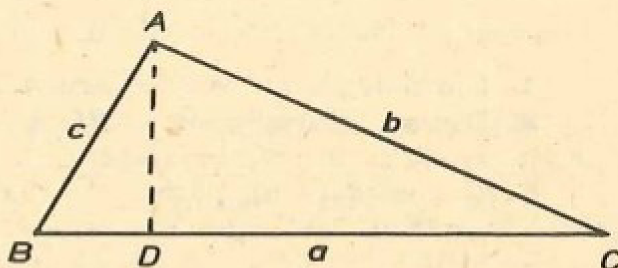


Fig. I.25.

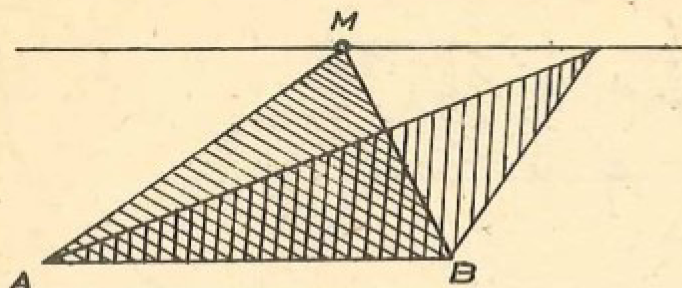


Fig. I.26.

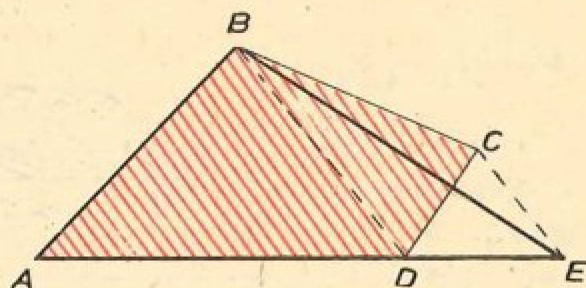
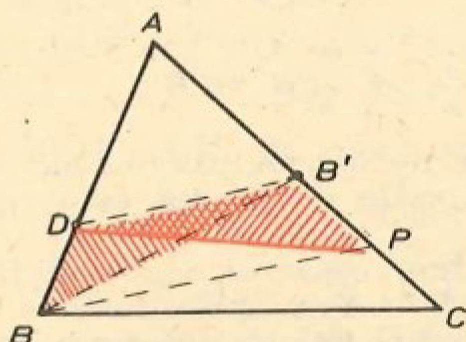


Fig. I.27.

Fig. I.28



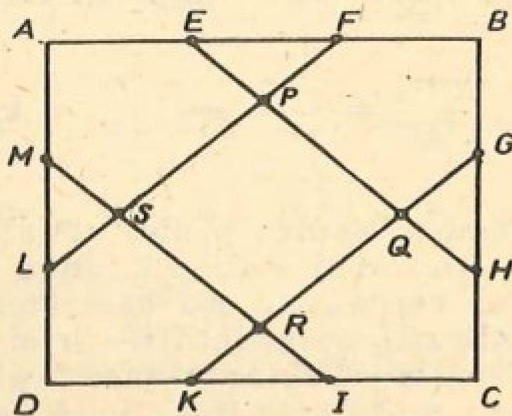


Fig. I.29.

Dar $\sigma[ABC] = \sigma[DAC] + \sigma[DBA]$, deci $a^2 = b^2 + c^2$.

3. Se dau: punctele fixe A, B, un semiplan S limitat de AB şi numărul $k > 0$. *Locul geometric al punctelor $M \in S$, astfel ca $\sigma[ABM] = k$, este o dreaptă paralelă cu AB* (fig. I.26).

Într-adevăr, $d(M, AB) = \frac{2k}{AB}$ este constantă.

4. *Să se construiască un triunghi de aceeaşi arie cu un patrulater dat $ABCD$.* Intersectăm în E dreapta AD cu paralela la BD, dusă prin C (fig. I.27). Conform cu 3, $\sigma[BDC] = \sigma[BDE]$, deci

$$\sigma[ABCD] = \sigma[ABD] + \sigma[BDC] = \sigma[ABD] + \sigma[BDE] = \sigma[ABE].$$

5. Se dau: un triunghi ABC și un punct $D \in (AB)$. Să se construiască o dreaptă care trece prin D și care împarte suprafaţa $[ABC]$ în două suprafeţe de aceeaşi arie (fig. I.28).

Notăm cu B' mijlocul lui $[AC]$ și intersectăm în P dreapta AC cu paralela la DB', dusă prin B. Atunci $\sigma[ADP] = \sigma[ABB'] = \frac{\sigma[ABC]}{2}$.

Exerciţii

1. Paralelogramul $ABCD$ are $AB = 6$, $AC = 7$ şi $d(D, AC) = 2$. Să se afle $d(D, AB)$.

2. Dintre triunghiurile ABC cu $BC = a$ şi $CA = b$, a şi b fiind numere date, să se afle un triunghi de arie maximă.

3. Se consideră un pătrat $ABCD$ şi punctele E, F, G, H, I, K, L, M care împart fiecare latură în trei segmente congruente (fig. I.29). Să se arate că $PQRS$ este un pătrat şi că aria lui este egală cu $\frac{2}{9}\sigma[ABCD]$.

4. Diagonalele trapezului $ABCD$ ($AB \parallel DC$) se taie în O. a) Să se arate că triunghiurile AOD şi BOC au aceeaşi arie. b) Paralela prin O la AB taie AD şi BC în M şi N. Folosind proprietatea a) să se arate că $(MO) \equiv (ON)$.

5. E fiind mijlocul laturii neparalele $[AD]$ a trapezului $ABCD$, să se arate că $\sigma[ABCD] = 2\sigma[BCE]$.

6*. Se dau: un unghi $\widehat{BAC}$ şi un punct D în interiorul lui. O dreaptă prin D taie laturile unghiului în M şi N. Să se determine dreapta MN astfel încît aria triunghiului AMN să fie minimă.

7*. Să se construiască un punct P în interiorul triunghiului ABC, astfel încît triunghiurile PAB, PBC, PCA să aibă arii egale.

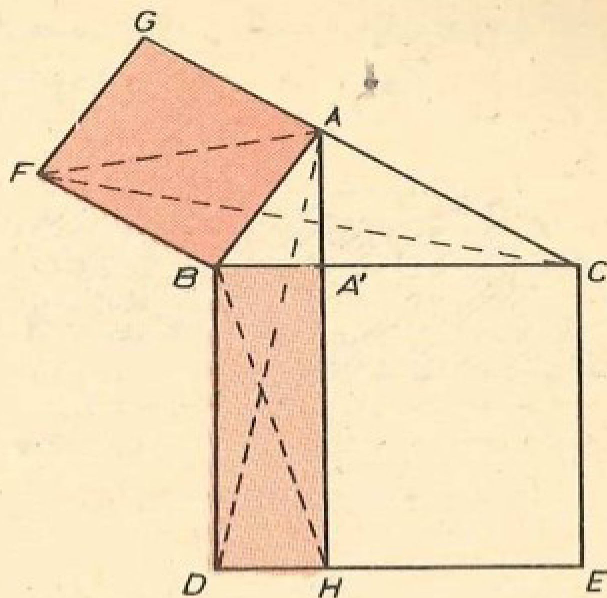


Fig. I.30.

8*. Să se descompună o suprafaţă triunghiulară în trei suprafeţe de aceeaşi arie, prin paralele la o latură a triunghiului.

9*. Rezolvaţi problema analoagă pentru un trapez.

10. Prelungim razele duse la vîrfurile unui triunghi echilateral, înscris într-un cerc $\mathcal{C}(O, r)$, pînă la intersecţia cu cercul care trece prin vîrfurile unui pătrat circumscris cercului $\mathcal{C}(O, r)$. Să se arate că punctele astfel obţinute sînt vîrfurile unui triunghi de aceeaşi arie cu hexagonul înscris în $\mathcal{C}(O, r)$.

11. Să se demonstreze teorema catetei cu ajutorul ariilor.

Indicaţie. Pe ipotenuza $[BC]$ şi pe cateta $[AB]$ construim pătratele $BCED$ şi $ABFG$ (fig. I.30). Perpendiculara din A pe BC taie BC în A' şi DE în H. Trebuie să arătăm că $\sigma[ABFG] = \sigma[BA'HD]$ sau $\sigma[ABF] = \sigma[BDH]$, $\sigma[ABF] = \sigma[CBF]$, $\sigma[BDH] = \sigma[BDA]$ şi $\triangle CBF \equiv \triangle DBA$.

§ 4. Suprafeţe măsurabile. Aria discului

Vom asocia acum cîte o arie şi unor mulţimi care nu sînt suprafeţe poligonale. Cu alte cuvinte: vom prelungi funcţia-arie la o mulţime de figuri (o figură este o mulţime de puncte din plan), această mulţime conţinînd mulţimea suprafeţelor poligonale precum şi alte mulţimi de figuri ca discurile, sectoarele şi segmentele de cerc etc.

Definiţie. O mulţime $\mathcal{M}$ se numeşte ***suprafaţă măsurabilă*** dacă există un număr unic $\sigma(\mathcal{M})$ mai mare sau egal cu aria oricărei suprafeţe poligonale incluse în $\mathcal{M}$ şi mai mic sau egal cu aria oricărei suprafeţe poligonale care include pe $\mathcal{M}$ (fig. I.31). Numărul $\sigma(\mathcal{M})$ se numeşte ***aria lui*** $\mathcal{M}$. Se va nota cu S^* mulţimea suprafeţelor măsurabile.

Fig. I.32.

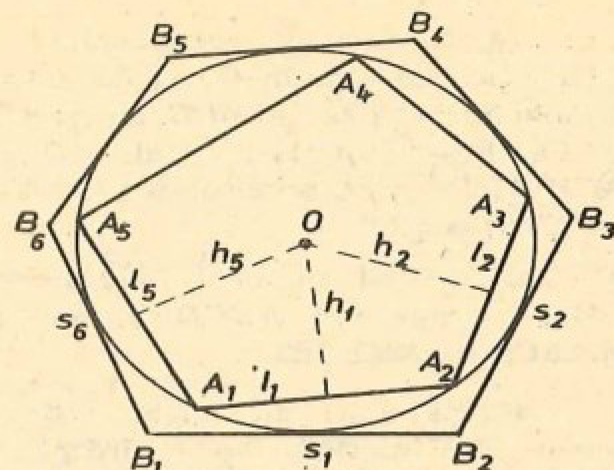


Fig. I.31.

Teorema 1. Un disc $[\mathcal{C}(O, r)]$ este o suprafață măsurabilă, a cărei arie se calculează astfel:

$$\sigma[\mathcal{C}(O, r)] = \pi r^2.$$

Demonstrație. Fie $A_1A_2 \ldots A_n$ un poligon înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r)$ și $B_1B_2 \ldots B_m$ un poligon circumscris aceluiași cerc (fig. I.32). Se notează $l_i = A_iA_{i+1}$, $h_i = \mathrm{d}\,(O, A_iA_{i+1})$ pentru $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $l_n = A_nA_1$, $h_n = \mathrm{d}\,(O, A_nA_1)$, $s_i = B_iB_{i+1}$ pentru $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ și $s_m = B_mB_1$. Atunci

$$\sigma[A_1A_2 \ldots A_n] = \sigma[OA_1A_2] + \sigma[OA_2A_3] + \ldots + \sigma[OA_nA_1] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} h_i l_i.$$

Deoarece $h_i < r$, $\sigma[A_1 \ldots A_n] < \frac{1}{2} r \sum_{i=1}^{n} l_i$, iar din modul de definire a lungimii cercului $\sum_{i=1}^{n} l_i < 2\pi r$, deci

(1) $$\sigma[A_1A_2 \ldots A_n] < \pi r^2.$$

În mod asemănător și ținînd cont că $\mathrm{d}(O, B_iB_{i+1}) = r$, rezultă

$$\sigma[B_1B_2 \ldots B_n] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} rs_i = \frac{r}{2}\sum_{i=1}^{n} s_i > \frac{r}{2} \cdot 2\pi r,$$

deci

(2) $$\sigma[B_1B_2 \ldots B_n] > \pi r^2.$$

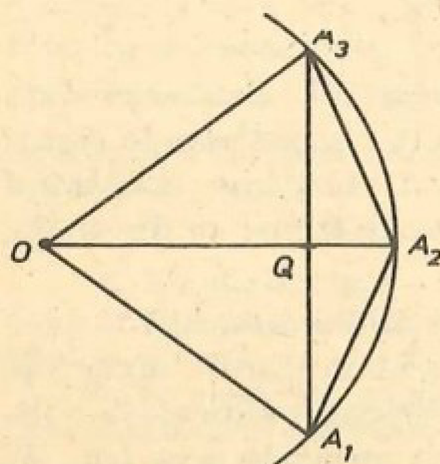


Fig. I.33.

Numărul πr^2 verifică, deci, condițiile din definiția unei suprafețe măsurabile. Vom arăta mai jos că πr^2 este singurul număr care verifică aceste condiții și cu aceasta teorema va fi demonstrată.

Vom folosi condițiile (1) și (2) numai pentru poligoane regulate $A_1A_2 \ldots A_n$, $B_1B_2 \ldots B_m$ și $n = 2m$. În acest caz avem (fig. I.33)

$$\sigma[A_1A_2 \ldots A_{2m}] = 2m\sigma[OA_1A_2] = m\sigma[OA_1A_2A_3] =$$
$$= m\left(\frac{A_1A_3 \cdot OQ}{2} + \frac{A_1A_2 \cdot A_2Q}{2}\right) =$$
$$= m\,\frac{A_1A_3 \cdot OA_2}{2} = \frac{p_m r}{2},$$

$$\sigma[B_1B_2 \ldots B_m] = m\sigma[OB_1B_2] = m\,\frac{s_m r}{2} = \frac{P_m r}{2},$$

unde p_m, P_m sînt perimetrele poligoanelor $A_1A_3 \dots A_{2m-1}$, $B_1B_2 \dots B_m$. Prin urmare, din

(3) $$\frac{p_m r}{2} < x < \frac{P_m r}{2},\ m \in \mathbf{N}^*$$

trebuie să deducem că $x = \pi r^2$.

Din (3) rezultă

(4) $$p_m < \frac{2x}{r} < P_m,\ m \in \mathbf{N}^*.$$

Ştim din definiţia lungimii l a cercului că l este *singurul* număr mai mare decît perimetrul oricărui poligon înscris în cerc şi mai mic decît perimetrul oricărui poligon circumscris cercului. Această caracterizare a lui l rămîne valabilă dacă înlocuim poligoanele de mai sus cu *poligoane regulate oarecare*, înscrise în cerc respectiv circumscrise cercului, deci din (4) rezultă că

$$\frac{2x}{r} = l,$$

deci $x = \frac{r \cdot l}{2} = \frac{r \cdot 2\pi r}{2} = \pi r^2$ şi teorema 1 este demonstrată.

Definiţie. Se numeşte *sector de cerc* determinat de arcul $\widehat{AB}$ al cercului $\mathcal{C}(O, r)$ reuniunea segmentelor $[OM]$, unde $M \in \widehat{AB}$.

Pe figura I.34, punctele $A, B \in \mathcal{C}(O, r)$ determinînd arcul mic $\widehat{AB}$ şi arcul mare $\widehat{AB}$, vor determina două sectoare de cerc, corespunzătoare celor două arce.

Teorema 2. Sectorul de cerc determinat de arcul $\widehat{AB}$ al cercului $\mathcal{C}(O, r)$ este o suprafaţă măsurabilă şi aria lui este egală cu

$$\frac{1}{2} r l_{\widehat{AB}} = \frac{\pi r^2}{360} \mathrm{m}(\widehat{AB}) = \frac{r^2}{2} \cdot \mu(\widehat{AB}).$$

Demonstraţia acestei teoreme este analoagă demonstraţiei teoremei 1.

Numărul $\sigma(\mathcal{M})$ asociat unei suprafeţe măsurabile permite definirea unei funcţii $\sigma : \delta^* \to R_+$, care verifică proprietăţile (1)—(3) ale teoremei 1, § 3, cu specificarea că noţiunile de interior, frontieră ale elementelor lui $\mathcal{M}$ se definesc în mod analog.

Aplicaţie. Calculul ariei unui *segment de cerc* (intersecţia unui disc $[\mathcal{C}(O, r)]$ cu un semiplan închis limitat de o secantă a lui $\mathcal{C}(O, r)$) (fig. I.35).

Faptul că segmentul de cerc este o suprafaţă măsurabilă se demonstrează ca şi în cazul discului. Notăm cu σ_s, σ_s' ariile segmentelor de cerc determinate de arcul mic $\widehat{AB}$ respectiv arcul mare $\widehat{AB}$ (fig. I.35) şi fie $\alpha = \mu(\widehat{AOB})$. Conform teoremei 3 $\sigma(\text{sector mic } \widehat{AB}) = \sigma_s + \sigma[AOB]$.

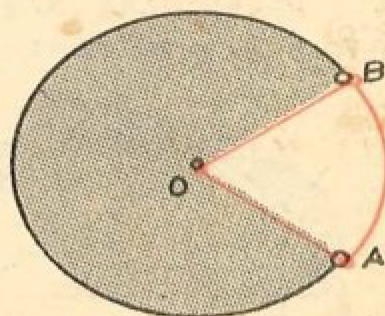


Fig. I.34.

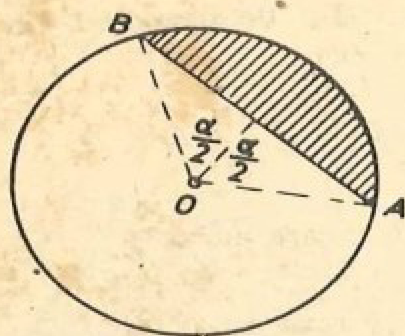


Fig. I.35.

Ţinînd cont de

$$\sigma(\text{sector mic } \widehat{AB}) = \frac{r^2}{2}\,\alpha.\ \sigma[AOB] =$$

$$= \frac{2r\sin\frac{\alpha}{2}\cdot r\cos\frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{r^2\sin\alpha}{2}$$

obţinem

(5) $$\sigma_s = \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$$

şi în mod analog

$$\sigma_s' = \frac{r^2}{2}(2\pi - \alpha + \sin\alpha).$$

Notînd $\alpha' = 2\pi - \alpha$, formula lui σ_s ia forma (5):

$$\sigma_s' = \frac{r^2}{2}(\alpha' - \sin\alpha').$$

Observaţie. Se va admite că punctele şi segmentele sînt mulţimi măsurabile şi au aria nulă.

Exerciţii

1. Construiţi un cerc concentric cu cercul dat $\mathcal{C}(O, r)$, astfel încît să împartă discul $[\mathcal{C}(O, r)]$ în două părţi de arii egale.

2. Suprafeţele haşurate pe figura I.36 (lunulele lui Hipocrat) sînt determinate de semicercurile descrise pe laturile triunghiului dreptunghic ABC. Arătaţi că suma ariilor lor este egală cu aria triunghiului ABC.

3. Din punctul C, situat pe semicercul de diametru $[AB]$, se coboară perpendiculara CD, $D \in AB$ (fig. I.37). Aria suprafeţei haşurate, limitată de semicercuri (secera lui Arhimede), este egală cu aria discului de diametru $[CD]$.

4. Se consideră un triunghi echilateral ABC cu $AB = 2a$ (fig. I.38). Aria suprafeţei haşurate, determinată de cercurile $\mathcal{C}(A, a)$, $\mathcal{C}(B, a)$, $\mathcal{C}(C, a)$ şi $\mathcal{C}(A, 3a)$, este egală cu aria sectorului de cerc, determinat de arcul mic $\widehat{EF}$ al cercului $\mathcal{C}(C, a)$.

5. Să se arate că aria „coroanei circulare" cuprinse între cercurile $\mathcal{C}(O, r_1)$ şi $\mathcal{C}(O, r_2)$ $(r_1 < r_2)$ este egală cu aria unui disc care are ca diametru o coardă a cercului $\mathcal{C}(O, r_2)$, tangentă cercului $\mathcal{C}(O, r_1)$.

6. Fie $[OA]$, $[OB]$ două raze perpendiculare ale unui cerc de centru O. Pe arcul mic $\widehat{AB}$ se iau punctele C şi D astfel încît $\widehat{AC} \equiv \widehat{BD}$ şi fie E, F proiecţiile lui C, D pe OB. Să

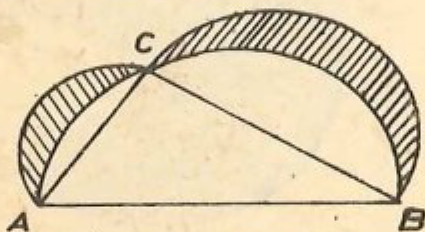


Fig. I.36.

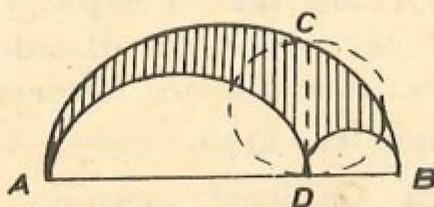


Fig. I.37.

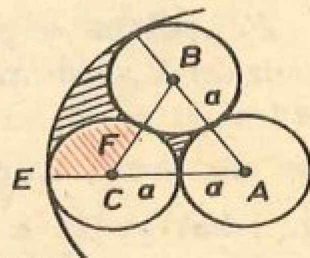


Fig. I.38.

se arate că aria suprafeței mărginite de segmentele $[DF]$, $[FE]$, $[EC]$ și de arcul $\overset{\frown}{CD}$ este egală cu aria sectorului determinat de arcul $\overset{\frown}{CD}$ al cercului $\mathcal{C}(O, OA)$.

Exerciții recapitulative

1. Aria pătratului construit pe tangenta comună a cercurilor, care au ca diametre catetele unui triunghi, este egală cu aria triunghiului.

2. Să se afle aria octogonului regulat înscris într-un cerc de rază r.

3. Să se arate, folosind arii, că suma distanțelor unui punct variabil, situat în interiorul triunghiului echilateral ABC, la laturile lui este constantă.

4*. Se consideră un triunghi dat ABC și un punct variabil $M \in (BC)$. Să se arate că între distanțele $x = d(M, AB)$ și $y = d(M, AC)$ există o relație de forma $kx + ly = 1$, unde k și l sînt constante.

5. Fie M și N mijloacele laturilor $[BC]$ și $[AD]$ ale patrulaterului convex $ABCD$ și $\{P\} = AM \cap BN$, $\{Q\} = CN \cap MD$. Să se arate că aria patrulaterului $MQNP$ este egală cu suma ariilor triunghiurilor ABP și CDQ.

6. Într-un pătrat de latură 1 se unește mijlocul fiecărei laturi cu extremitățile laturii opuse. Să se afle aria octogonului interior convex care se formează în acest fel.

7. Diagonala $[BD]$ a paralelogramului $ABCD$ se împarte prin punctele M, N în trei segmente congruente. Să se arate că $AMCN$ este un paralelogram și să se calculeze raportul dintre $\sigma[AMCN]$ și $\sigma[ABCD]$.

8. Se dau punctele A, B, C, D astfel încît $AB \cap CD = \{P\}$. Să se afle locul geometric al punctelor M astfel ca $\sigma[ABM] = \sigma[CDM]$.

Indicație. Problema revine la determinarea locului geometric al punctelor M pentru care raportul distanțelor lui M la dreptele AB și CD este o constantă dată. Locul cerut se compune din două drepte care trec prin punctul P, din care se scoate punctul P.

9. Problema analoagă cu problema 8 în cazul $AB \parallel CD$.

Capitolul II

Aplicațiile trigonometriei în geometrie

Geometria este una dintre disciplinele matematice în care trigonometria își găsește aplicații imediate, dat fiind că între aceste discipline există o împletire strînsă (geometria a fost utilizată într-o măsură considerabilă în elaborarea trigonometriei).

Dacă ABC este un triunghi, numerele $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $A = \mu(\hat{A})$, $B = \mu(\hat{B})$, $C = \mu(\hat{C})$ se numesc *elementele triunghiului* ABC. Dacă a, b, c, A, B, C sînt elementele triunghiului ABC, aceste numere sînt elementele oricărui triunghi congruent cu ABC. Triunghiurile congruente, avînd aceleași elemente, le considerăm egale sub aspect metric.

Problema principală a capitolului de față constă în *rezolvarea metrică a triunghiului* adică în determinarea tuturor elementelor sale, cînd se cunosc trei din ele. De menționat este faptul că, deoarece în orice triunghi ABC, $A + B + C = \pi$, printre cele trei elemente cunoscute figurează neapărat lungimea unei laturi.

§ 1. Coordonate polare în plan

În sistemul de coordonate din plan de reper (O, A, B), fie punctul $P(x, y)$ diferit de originea $O(0, 0)$ a axelor de coordonate. Dacă notăm cu r distanța OP, atunci $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Deoarece $P \neq O$, rezultă $r \neq 0$.

Punctul $M\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right)$ este situat pe cercul unitate $C = \mathcal{C}(O, 1)$. Într-adevăr

$$OM^2 = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = 1, \text{ adică } OM = 1.$$

Rezultă că M este punctul de intersecție al semidreptei $(OP$ cu cercul unitate C.

Deoarece $M \in C$, există numărul unic $t \in [0, 2\pi)$, astfel încît

$$\frac{x}{r} = \cos t, \quad \frac{y}{r} = \sin t.$$

Aceste egalități se pot scrie sub forma

$$(1) \qquad \begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t. \end{cases}$$

Dacă $P = O$, adică $x = 0$, $y = 0$, atunci $r = OP = 0$ și formulele (1) sînt valabile, oricare ar fi $t \in [0, 2\pi)$.

Se observă că atît numerele (x, y) cît și numerele (r, t) determină poziția punctului P în plan.

Numerele (r, t) ce intră în formulele (1) se numesc *coordonatele polare* ale punctului P; r se numește *raza polară* a lui P, iar t se numește *argumentul polar al lui P*.

Dacă se cunosc numerele x, y, nu ambele nule, coordonatele carteziene ale punctului P, raza polară r a lui P se determină din $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, iar argumentul polar t se determină din una din egalitățile (1), ținîndu-se seama de cadranul în care se află punctul P. Dacă $x \neq 0$, putem folosi și formula

$$(2) \qquad \operatorname{tg} t = \frac{y}{x},$$

deci în acest caz

$$(2') \qquad t = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + k\pi,$$

unde $k = 0$ dacă $P(x, y)$ se află în cadranul I, $k = 1$ dacă P este în cadranul II sau III și $k = 2$ dacă P se găsește în cadranul IV $\left(\text{deoarece } \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Dacă $x = 0$, $y = 0$, avem $r = 0$ și argumentul polar este nedeterminat.

Exemple. Să se determine coordonatele polare ale punctelor:

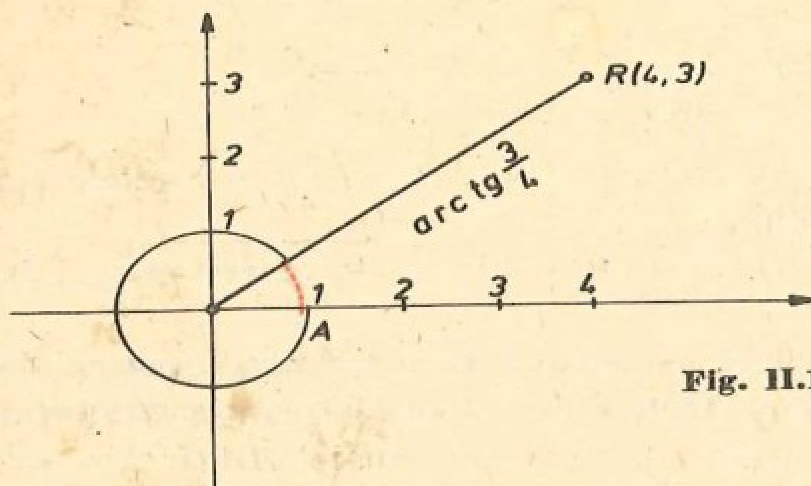
a) $P(5, 0)$; b) $Q(0, -8)$; c) $R(4, 3)$; d) $S(\sqrt{3}, -1)$.

Soluție. a) $r = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$. Punctul P fiind situat pe semiaxa absciselor pozitive, rezultă $t = 0$. Așadar coordonatele polare ale lui P sînt $(5, 0)$.

b) Punctul $Q(0, -8)$ fiind pe semiaxa ordonatelor negative, rezultă $t = \frac{3\pi}{2}$ și $r = 8$.

c) Avem $r = 5$ și $\operatorname{tg} t = \frac{3}{4}$. Deoarece $R(4, 3)$ este situat în cadranul I, rezultă $t = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} \approx 0{,}645$.

d) În acest caz $r = 2$ și $\operatorname{tg} t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Punctul S fiind situat în cadranul IV, rezultă $t = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$.



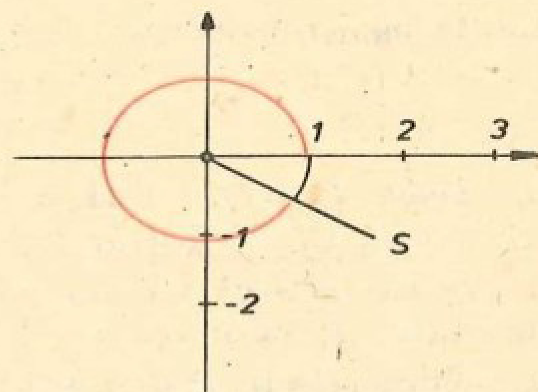


Fig. II.1.

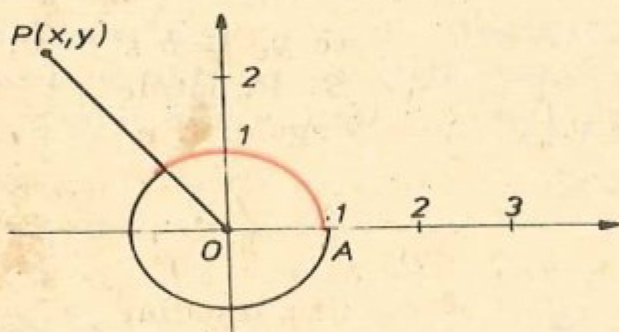


Fig. II.2.

În figura II.1 sînt reprezentate cazurile c) şi d). Pe cercul unitate a fost marcat punctat arcul care are lungimea t (în cazul c)).

De reţinut este faptul că atunci cînd punctul $P(x, y)$ are ordonata strict pozitivă, adică $y > 0$ numărul t reprezintă măsura în radiani a unghiului $\widehat{AOP}$ (figura II.2).

Exerciţii

1. Să se determine coordonatele polare ale punctelor: a) $M(6, -8)$, b) $N(-3, -4)$, c) $P(0, -5)$, d) $Q(1, \sqrt{3})$, e) $R(-2, 1)$, f) $S(-3, 0)$.

2. Să se determine coordonatele carteziene ale punctelor de coordonate polare: a) $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$, b) $\left(5, 2\pi - \arcsin \frac{5}{13}\right)$, c) $\left(7, \frac{4\pi}{3}\right)$, d) $(5, \pi)$.

3. Să se determine coordonatele polare ale punctelor situate pe dreapta de ecuaţie $3x - 4y = 0$, care au distanţa la originea axelor de coordonate egală cu 2.

§ 2. Teorema sinusurilor şi teorema cosinusului

Vom stabili în continuare două relaţii fundamentale între elementele unui triunghi, care vor permite rezolvarea metrică a triunghiului.

Pentru simplificarea limbajului facem următoarele convenţii: numerele a, b, c le vom numi *laturi*, iar numerele A, B, C *unghiuri* ale triunghiului ABC.

Teorema 1 (Teorema sinusurilor.) În orice triunghi ABC avem:

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}}. \tag{2}$$

Demonstrație. În planul triunghiului ABC (figura, II.3), alegem un sistem de axe de coordonate cu originea în punctul A, dreapta AB, axa absciselor și dreapta perpendiculară în A pe AB, axa ordonatelor. Sistemul a fost ales în așa fel încît abscisa lui B și ordonata lui C să fie numere strict pozitive.

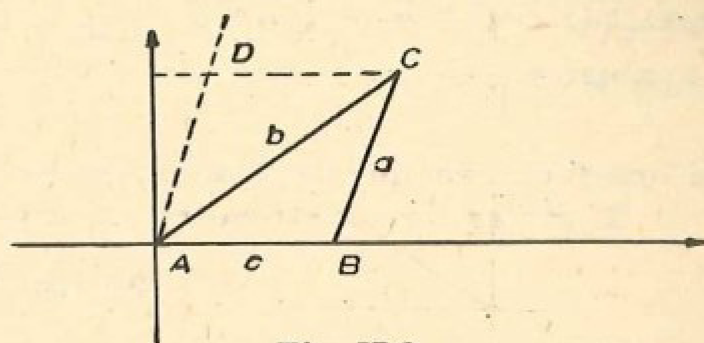


Fig. II.3.

Dreapta paralelă prin A la BC se intersectează cu paralela prin C la AB, în punctul D. Înseamnă că $AD = BC = a$, iar unghiurile $\widehat{BAD}$ și $\widehat{ABC}$ fiind suplimentare, rezultă $\mu(\widehat{BAD}) = \pi - B$.

Utilizînd formulele (1), § 1 ordonata punctului C este $y_C = b \sin A$, iar ordonata punctului D este $y_D = a \sin(\pi - B) = a \sin B$. Punctele C și D fiind pe aceeași paralelă la axa absciselor, au ordonatele egale. Din $y_C = y_D$ rezultă $b \sin A = a \sin B$ sau

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

În mod analog avem $a \sin C = c \sin A$ de unde rezultă imediat egalitățile (2).

Teorema 2. Dacă numerele strict pozitive $a_1, b_1, c_1, A_1, B_1, C_1$, verifică relațiile

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{a_1}{\sin A_1} = \dfrac{b_1}{\sin B_1} = \dfrac{c_1}{\sin C_1}, \\ A_1 + B_1 + C_1 = \pi, \end{cases}$$

atunci există un triunghi ABC ale cărui elemente sînt respectiv cele șase numere date.

Demonstrație. Deoarece din a doua relație (3) rezultă $B_1 + C_1 < \pi$, putem construi un triunghi ABC, astfel ca $BC = a_1$, $\mu(\hat{B}) = B_1$, $\mu(\hat{C}) = C_1$. Atunci $\mu(\hat{A}) = \pi - B_1 - C_1 = A_1$ și din teorema sinusurilor deducem:

$$\frac{a_1}{\sin A_1} = \frac{CA}{\sin B_1} = \frac{AB}{\sin C_1}.$$

Comparînd cu prima relație (3), rezultă $CA = b_1$, $AB = c_1$.

Aplicații. 1. Să se arate că triunghiul în care

$$\sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 A$$

este dreptunghic.

Soluție. Aplicînd teorema sinusurilor, din

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = m,$$

rezultă: $\sin B = \frac{b}{m}$, $\sin C = \frac{c}{m}$, $\sin A = \frac{a}{m}$. Înlocuind în relația din enunț, se obține

$$b^2 + c^2 = a^2$$

și conform reciprocei teoremei lui Pitagora, triunghiul este dreptunghic.

2. Să se demonstreze că triunghiul ABC în care

$$a = 2b \sin \frac{A}{2}, \ A \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right),$$

este isoscel.

Soluție. Conform teoremei sinusurilor și relației date, se obține $\sin A = 2 \sin B \sin \frac{A}{2}$, de unde $\cos \frac{A}{2} = \sin B$ sau $\sin B = \sin \frac{\pi - A}{2}$; deci

$$B = \frac{\pi - A}{2} \text{ sau } B = \pi - \frac{\pi - A}{2} = \frac{\pi + A}{2}.$$

În primul caz $C = \pi - A - B = \pi - A - \frac{\pi - A}{2} = \frac{\pi - A}{2} = B$ și triunghiul ABC este isoscel.

Cazul al doilea nu este posibil deoarece $A + B = \frac{\pi + 3A}{2} \in [\pi, 2\pi)$, oricare ar fi $A \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)$.

Teorema 3. (Teorema cosinusului.) În orice triunghi ABC avem:

(4) $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Demonstrație. Se ia un sistem de coordonate cu originea în vîrful A al triunghiului ABC, axa absciselor dreapta AB și axa ordonatelor dreapta perpendiculară în A pe AB (figura II.4). Sistemul a fost ales astfel ca abscisa lui B și ordonata lui C să fie numere pozitive. Punctul B are coordonatele $(c, 0)$, iar punctul C, conform cu (1), § 1, are coordonatele $(b \cos A, b \sin A)$.

Aplicînd formula distanței dintre două puncte rezultă:

$$BC^2 = (c - b \cos A)^2 + (b \sin A)^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

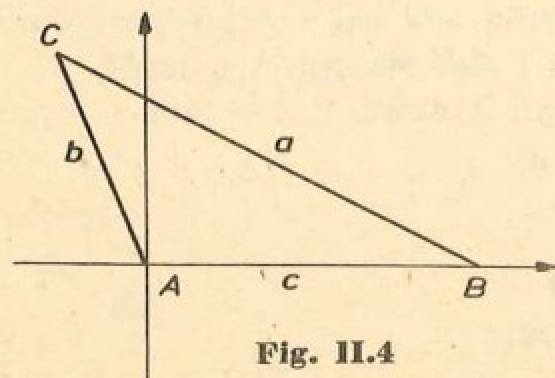


Fig. II.4

Dar $BC^2 = a^2$ și teorema este demonstrată.

Formula (4) rămîne adevărată dacă schimbăm pe a în b, pe b în c, pe c în a, pe A în B, pe B în C și pe C în A, adică avem:

(4′) $$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B,$$

(4″) $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Relaţia (4') s-a obţinut din (4) prin aşa-numita *permutare circulară*; tot aşa s-a obţinut (4") din (4'). În general, *dacă o relaţie între a, b, c, A, B, C este adevărată pentru orice triunghi, atunci sînt adevărate şi relaţiile deduse din ea prin permutări circulare.*

Teorema 4. Dacă numerele strict pozitive a_1, b_1, c_1 şi $A_1 \in (0, \pi)$ satisfac relaţia

$$a_1^2 = b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1 \cos A_1, \tag{5}$$

atunci există un triunghi ABC cu

$$BC = a_1,\ CA = b_1,\ AB = c_1,\ \mu(\hat{A}) = A_1.$$

Demonstraţie. Se poate construi un triunghi ABC, astfel ca $CA = b_1$. $AB = c_1$, $\mu(\hat{A}) = A_1$. Aplicînd teorema cosinusului în acest triunghi, se obţine:

$$BC^2 = b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1 \cos A_1$$

şi comparînd cu (5), rezultă $BC = a_1$.

Aplicaţii. 1. Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic în A dacă şi numai dacă

$$\cos B + \cos C = \frac{b + c}{a}.$$

Soluţie. Dacă $A = \frac{\pi}{2}$, $\cos B + \cos C = \frac{c}{a} + \frac{b}{a} = \frac{b + c}{a}$.

Mai rămîne de demonstrat că:

$$\cos B + \cos C = \frac{b + c}{a} \Rightarrow A = \frac{\pi}{2}.$$

Din teorema cosinusului rezultă:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \text{ şi } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Înlocuind în relaţia dată se obţine:

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{b + c}{a} \text{ sau } a^2 = b^2 + c^2,$$

relaţie care caracterizează triunghiul dreptunghic.

2. Să se arate că, dacă $a = 41$, $b = 28$ şi $c = 15$ triunghiul ABC este obtuzunghic.

Soluţie. Numai unghiul opus laturii de lungime mai mare poate fi obtuz. Din

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{4}{5},$$

deoarece $A \in (0, \pi)$ şi $\cos A < 0$, rezultă $A \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Deci triunghiul este obtuzunghic.

Exerciţii

1. Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

a) $b \cos C + c \cos B = a$;

b) $b \cos B + c \cos C = a \cos (B - C)$.

2. Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

a) $b \cos C - c \cos B = \frac{b^2 - c^2}{a}$;

b) $2(bc \cos A + ac \cos B + ab \cos C) = a^2 + b^2 + c^2$.

3. Folosind teorema cosinusului, să se arate că

$$4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2,$$

unde m_a este lungimea medianei corespunzătoare laturii de lungime a.

4. Să se arate că triunghiul ABC în care

$$\frac{a + c}{b} = \operatorname{ctg} \frac{B}{2},$$

este dreptunghic.

5. Să se arate că, dacă în triunghiul ABC avem $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = 2 \operatorname{ctg} C$, atunci $a^2 + b^2 = 2c^2$.

§ 3. Rezolvarea triunghiurilor

In continuare ne ocupăm cu rezolvarea metrică a triunghiului în diferite cazuri.

Cazul L.U.L. Se dau două laturi şi unghiul cuprins între ele, de exemplu a, b, C.

În acest caz triunghiul poate fi construit, deci existenţa lui este asigurată. Teorema L.U.L. ne arată că, privită metric, problema dată are soluţie unică.

Elementele necunoscute se determină astfel: din

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

se determină c, iar A se află din teorema sinusurilor.

Cazul U.L.U. Se dau o latură şi unghiurile alăturate ei, de exemplu a, B, C. În acest caz triunghiul ABC există dacă şi numai dacă $B + C < \pi$. Unicitatea soluţiei rezultă din teorema U.L.U.

Numerele b şi c se calculează cu ajutorul teoremei sinusurilor, ştiind că $A = \pi - B - C$.

Cazul L.L.L. Se dau cele trei laturi a, b, c.

Din geometrie se ştie că triunghiul ABC există dacă şi numai dacă $a < b + c$, $b < c + a$ şi $c < a + b$.

Numărul A se calculează din

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \tag{1}$$

iar numărul B, în mod analog sau din teorema sinusurilor.

Condiţia de existenţă se poate obţine şi cu ajutorul teoremei 4, § 2. Într-adevăr, pentru numerele strict pozitive a, b, c, avem

$$-1 < \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (b - c - a)(b - c + a) < 0 \\ (b + c + a)(b + c - a) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b > c \\ c + a > b \\ b + c > a. \end{cases}$$

Aşadar există A, verificînd formula (1) dacă şi numai dacă $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$.

Cazul L.L.U. Se dau două laturi şi unghiul opus uneia din ele, de exemplu a, b, A.

În acest caz, ţinînd seama de teorema 4, § 2, triunghiul ABC există dacă şi numai dacă ecuaţia

(2) $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

cu necunoscuta c are cel puţin o soluţie strict pozitivă.

Problema are două, una sau nici o soluţie după cum ecuaţia (2) admite două, una sau nici o rădăcină strict pozitivă.

Rezolvarea şi discuţia cazului se poate face şi pe baza teoremei 2, § 2.

Exemple. 1. $a = \sqrt{2}$, $b = 2$, $B = \frac{\pi}{4}$.

Soluţie. Din $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, rezultă

$$c^2 - 2c - 2 = 0.$$

Această ecuaţie are unica rădăcină pozitivă $c = 1 + \sqrt{3}$, deci există o singură soluţie. Din $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, rezultă $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $A = \frac{\pi}{6}$ şi $C = \pi - A - B = \frac{7\pi}{12}$.

2. $b = \sqrt{5}$, $c = \sqrt{17}$, $B = \arccos \frac{4\sqrt{17}}{17}$.

Soluţie. Din teorema cosinusului, rezultă

$$a^2 - 8a + 12 = 0.$$

S-a obţinut o ecuaţie cu soluţia $a_1 = 2$ şi $a_2 = 6$. Cu aceste date există două triunghiuri.

Dacă $a_1 = 2$, atunci $C_1 = \pi - \arccos \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $A_1 = \pi - C_1 - B$.

Dacă $a_2 = 6$, atunci $C_2 = \arccos \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $A_2 = \pi - C_2 - B$.

Din tabele sau cu ajutorul calculatorului găsim

$C_2 \approx \arccos 0{,}894 \approx 0{,}46$ şi $C_1 = \pi - C_2 \approx 3{,}14 - 0{,}46 = 2{,}68$, adică

$$m(\hat{C}_2) = 26°30' \text{ şi } m(\hat{A}_1) = 163°30'.$$

Aplicații. 1. În cazul L.L.L., determinarea lui A în funcție de a, b, c se poate face și folosind una din formulele.

$$\text{(3)} \qquad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \quad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

unde $2p = a + b + c$.

Într-adevăr din teorema cosinusului rezultă

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Dar $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2}$. Înlocuind se obține:

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) = \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{4bc}.$$

Din $a + b + c = 2p$, rezultă $a + b + c - 2a = 2p - 2a$. Deci $b + c - a = 2(p - a)$ și $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{bc}$. Ultima egalitate scrisă este echivalentă cu prima egalitate din enunț, deoarece $A \in (0, \pi)$ și $\cos\frac{A}{2} > 0$.

A doua egalitate din enunț se demonstrează pornind de la $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2}$ și făcînd calcule similare cu cele de la demonstrația primei egalități.

Rămîne ca exercițiu să se scrie formulele analoage cu (3) pentru $\cos\frac{B}{2}$, $\cos\frac{C}{2}$, $\sin\frac{B}{2}$, $\sin\frac{C}{2}$.

2. În orice triunghi ABC avem:

$$\text{(4)} \qquad l_a = \frac{2bc}{b + c}\cos\frac{A}{2},$$

l_a fiind lungimea bisectoarei unghiului $\hat{A}$.

Soluție. Fie D punctul de intersecție al bisectoarei unghiului $\hat{A}$ cu latura $[BC]$ (fig. II.5). Aplicînd teorema bisectoarei se obține

$$BD = \frac{ac}{b + c}.$$

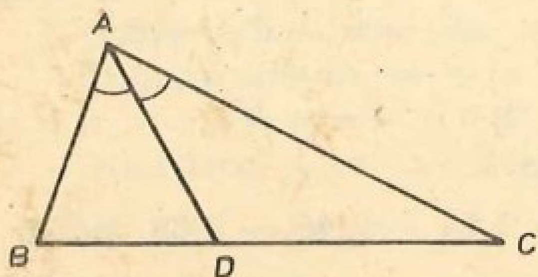


Fig. II.5.

În triunghiul ABD, conform teoremei sinusurilor, rezultă:

$$\frac{l_a}{\sin B} = \frac{BD}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Înlocuind pe BD se obține relația de demonstrat.

În mod analog avem:

$$l_b = \frac{2ac}{a+c} \cos \frac{B}{2}, \quad l_c = \frac{2ab}{a+b} \cos \frac{C}{2}.$$

Exerciții

1. Să se determine toate elementele triunghiului ABC știind că:

a) $a = 14$, $c = 13$, $B = \arccos \frac{5}{13}$; b) $b = 15$, $A = \arccos \frac{63}{65}$, $C = \arccos \frac{3}{5}$;

c) $a = 15$; $b = 4$, $c = 13$; d) $a = 5$, $c = 6$, $C = \arccos \frac{4}{5}$;

e) $a = \sqrt{2}$, $b = 2$, $A = \frac{\pi}{6}$; f) $a = 5$, $b = 7$, $A = \arccos \frac{2\sqrt{10}}{7}$;

g) $a = 1$, $b = 2$, $A = \frac{\pi}{3}$.

2. Să se determine elementele necunoscute ale triunghiului ABC fiind date:

a) A, B și p;

b) $a + b = m$, A și B;

c) a, A și $b - c = d$.

3. Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{a-b}{a+b} \text{ (teorema tangentelor).}$$

4. În triunghiul ABC se dă $m(\hat{A}) = 60°$ și $\frac{b}{c} = 2 + \sqrt{3}$. Să se calculeze $\operatorname{tg} \frac{B-C}{2}$ și unghiurile B și C.

5. Într-un patrulater convex $ABCD$ se dau: $AD = 7(\sqrt{6} - \sqrt{2})$. $CD = 13$, $BC = 15$, $C = \arccos \frac{33}{65}$ și $D = \frac{\pi}{4} + \arccos \frac{5}{13}$. Se cer celelalte unghiuri ale patrulaterului și AB.

§ 4. Formule pentru aria triunghiului

Fie S aria triunghiului ABC. Avem mai întîi formulele (Cap. I, § 3, teorema 2):

(1) $$2S = ah_a = bh_b = ch_c,$$

unde h_a, h_b, h_c sînt înălțimile triunghiului.

În triunghiul ABC (fig. II.6), fie $h_a = AD$. Din triunghiul dreptunghic ADC deducem $h_a = b \sin C$, deci

(2) $$S = \frac{ab \sin C}{2}.$$

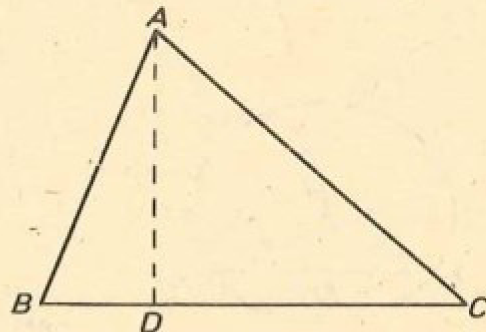


Fig. II.6.

Formula (2) se citeşte astfel:

Aria unui triunghi este egală cu jumătatea produsului a două laturi înmulţit cu sinusul unghiului dintre ele.

Din (2) rezultă:

$$S = \frac{ab}{2} \cdot 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = ab \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$$

şi ţinînd seama de formulele (3) de la § 3, găsim *formula lui Heron*:

$$(3) \qquad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Exprimînd pe b din teorema sinusurilor şi înlocuind în (2), se găseşte:

$$(4) \qquad S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

Scrieţi formulele analoage cu (2) şi (4), care se obţin prin permutări circulare.

Aplicaţie. Aria suprafeţei poligonale determinată de un poligon regulat cu n laturi este dată de:

$$(5) \qquad S_n = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n},$$

unde R este raza cercului circumscris poligonului.

Soluţie. Fie $AB = l_n$ lungimea laturii poligonului regulat (fig. II.7), M mijlocul laturii $[AB]$ şi O centrul cercului circumscris. Avem

$$S_n = n \cdot \sigma[ABO] = n \frac{l_n OM}{2}.$$

Dar $\mu(\widehat{AOB}) = \frac{2\pi}{n}$, deci $\mu(\widehat{AOM}) = \frac{\pi}{n}$. Înseamnă că $l_n = 2R \sin \frac{\pi}{n}$ şi $OM = R \cos \frac{\pi}{n}$. Înlocuind, se obţine formula (5).

Exerciţii

1. Să se calculeze aria triunghiului ABC atunci cînd:

a) $a = 17$, $B = \arcsin \frac{24}{25}$, $C = \arcsin \frac{12}{13}$;

b) $b = 2$, $m(\widehat{A}) = 135°$, $m(\widehat{C}) = 30°$;

c) $a = 7$, $b = 5$, $c = 6$;

d) $m(\widehat{A}) = 18°$, $b = 4$, $c = 6$.

2. Cîte triunghiuri distincte sub aspect metric există astfel ca

$$a = 15, \; c = 13, \; S = 24?$$

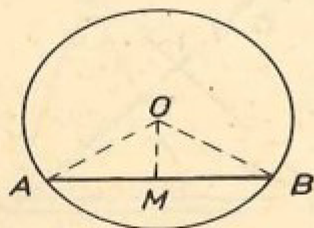


Fig. II.7.

3. Să se afle aria triunghiului ABC dacă:

$$a = \sqrt{6}, \ m(\hat{A}) = 60°, \ b + c = 3 + \sqrt{3}.$$

4. Să se afle aria patrulaterului din exercițiul 5; § 3.

5. Dacă S este aria poligonului regulat cu n laturi, să se calculeze: S_3, S_4, S_6, S_8, S_{12} și S_{20}, în funcție de R, raza cercului circumscris poligonului.

6*. Să se calculeze aria poligonului regulat $ABCDE \ldots M$ înscris în cercul de rază R, știind că

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

§ 5. Raza cercului circumscris și raza cercului înscris în triunghi

Teorema 1. În orice triunghi ABC, raza R a cercului circumscris se exprimă prin

(1) $$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C}.$$

Demonstrație. Triunghiul ABC are un unghi ascuțit, fie acesta $\hat{A}$. Notînd cu D punctul diametral opus lui B în cercul circumscris triunghiului (fig. II.8), avem: $\hat{A} \equiv \widehat{BDC}$ și $m(\widehat{BCD}) = 90°$. Așadar

$$\sin \hat{A} = \sin \widehat{BDC} = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}$$

și se obține prima egalitate (1). Celelalte rezultă din teorema sinusurilor.

Egalitățile (1) scrise sub forma

(2) $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

le utilizăm în continuare sub denumirea de *teorema sinusurilor*.

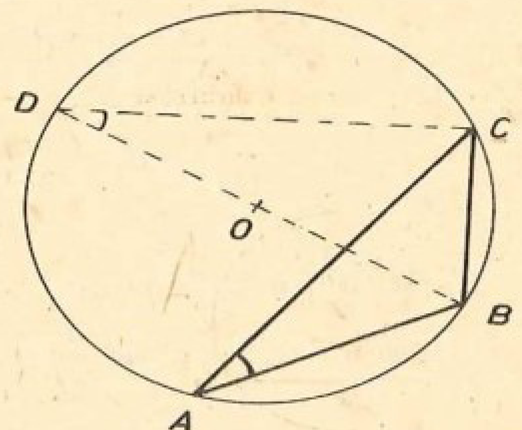


Fig. II.8.

Teorema 2. În orice triunghi ABC, raza r a cercului înscris se exprimă prin

(3) $$r = \frac{S}{p}.$$

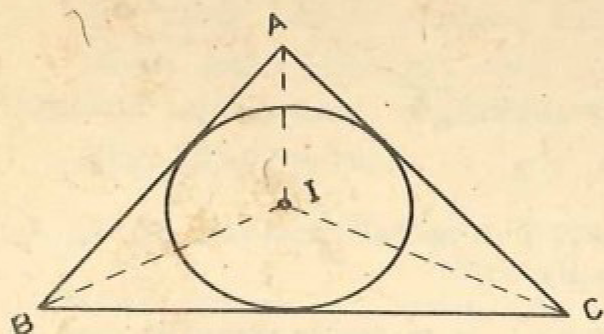


Fig. II.9.

Demonstrație. Punctul I de intersecție al bisectoarelor (fig. II.9) este centrul cercului înscris și este situat în interiorul triunghiului.

Înălțimile triunghiurilor IAB, IAC, IBC sînt egale cu r, iar suma ariilor acestor trei triunghiuri este egală cu S, adică

$$\frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = S,$$

de unde rezultă formula (3).

Aplicații. 1. Să se arate că pentru raza R a cercului circumscris triunghiului avem și formula

$$R = \frac{abc}{4S}. \tag{4}$$

Soluție. Ținînd seama de teorema 1 și de formula (2), § 4 se obțin succesiv:

$$R = \frac{c}{2 \sin C} = \frac{abc}{2ab \sin C} = \frac{abc}{4S}.$$

2. În orice triunghi ABC avem

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Soluție. Aplicînd formulele (3), § 3 se obține:

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{S^2}{pabc} = \frac{S}{p} \cdot \frac{4S}{4abc} = r \cdot \frac{1}{4R},$$

de unde rezultă relația cerută.

3. În orice triunghi ABC există relația

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

Soluție. Folosind formula (4) avem:

$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{8R^3 \sin A \sin B \sin C}{4R} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

Exerciții

1. Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

a) $r = (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}$; b) $S = p(p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}$;

c) $p = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$; d) $p - a = 4R \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$;

e) $m_a^2 = R^2(\sin^2 A + 4\cos A \sin B \sin C)$; f) $h_a = 2R \sin B \sin C$.

2. Dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, să se arate că

$$AI = 4R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

3. Să se demonstreze teorema 1 din acest paragraf utilizînd metoda analitică.

§ 6. Aplicații practice

Multe probleme topografice (de întocmire a planurilor porțiunilor de teren) au ca model matematic rezolvarea triunghiului. Dăm cîteva exemple.

1) **Distanța dintre două puncte accesibile, între care se află un obstacol.** Pentru a calcula distanța de la A la B (fig. II.10), se alege un punct C din care se văd punctele A și B. Cu ajutorul unor aparate, prin măsurare, se obțin numerele $AC = b$, $BC = a$, $\mu(\widehat{ACB}) = C$. Distanța de la A la B se calculează din triunghiul ABC:

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

2) **Distanța dintre două puncte inaccesibile.** Pentru a calcula distanța de la A la B (fig. II.11), se aleg două puncte C și D din care se văd punctele A și B și astfel ca distanța CD să se poată determina.

Prin măsurători se obțin numerele: $CD = a$, $\mu(\widehat{ACB}) = \alpha$, $\mu(\widehat{BCD}) = \beta$, $\mu(\widehat{ADC}) = \gamma$, $\mu(\widehat{ADB}) = \delta$.

Din triunghiurile BCD respectiv ACD se obțin:

$$BC = \frac{a \sin(\gamma + \delta)}{\sin(\beta + \gamma + \delta)}, \quad AC = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}.$$

Distanța dintre punctele inaccesibile A și B se obține din triunghiul ABC, cunoscîndu-i două laturi și unghiul cuprins între ele.

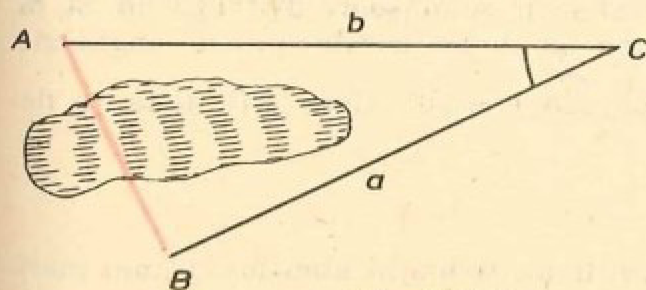


Fig. II.10.

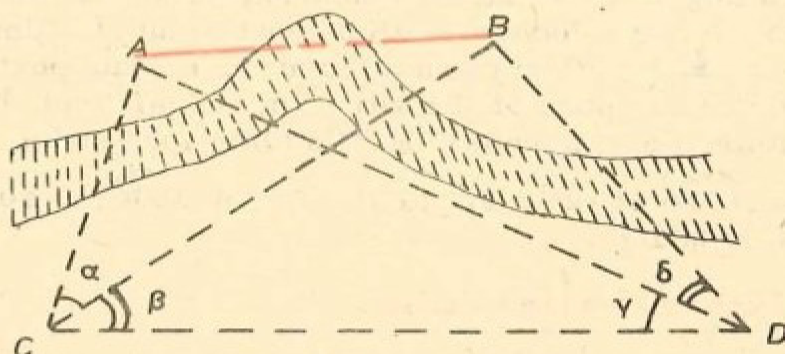


Fig. II.11.

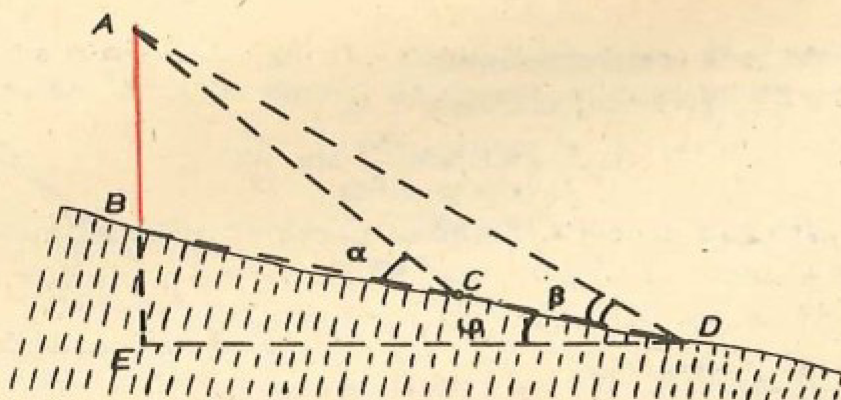


Fig. II.12.

3) **Determinarea înălţimii unui turn inaccesibil, situat pe un deal.** Fie turnul marcat prin segmentul $[AB]$ (fig. II.12). Alegem un punct accesibil C şi lucrăm în planul determinat de punctele A, B, C. Luăm încă un punct accesibil $D \in BC$ şi notăm cu E punctul de intersecţie al verticalei prin A cu orizontala prin D.

Prin măsurători se obţin:

$$CD = a,\ \mu(\widehat{EDB}) = \varphi,\ \mu(\widehat{ADB}) = \beta \text{ şi } \mu(\widehat{ACB}) = \alpha.$$

În triunghiul ACD, avem:

$$\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin(\alpha - \beta)}, \quad \text{deci } AC = \frac{a \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Din triunghiul ABC se obţine:

$$\frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)}, \quad \text{deci } AB = \frac{\sin\alpha}{\cos\varphi} AC.$$

Aşadar

$$AB = \frac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)\cos\varphi}.$$

Exerciţii

1. O persoană care se află pe malul unui rîu vede un arbore de pe malul opus sub un unghi de 60°, iar cînd se depărtează cu 20 m de la mal vede arborele sub un unghi de 15°. Să se calculeze înălţimea arborelui şi lăţimea rîului.

2. Ne aflăm pe malul unui rîu, care nu poate fi traversat şi vrem să măsurăm distanţa dintre doi copaci A şi B situaţi pe celălalt mal. În acest scop, se măsoară distanţa de 30 m dintre două puncte C şi D situate pe malul nostru şi următoarele patru unghiuri: $m(\widehat{ACD}) = 120°$, $m(\widehat{BCD}) = 60°$, $m(\widehat{BDC}) = 105°$, $m(\widehat{ADC}) = 30°$. Care este distanţa de la A la B?

Exerciţii recapitulative

1. Folosind teorema sinusurilor, să se arate că într-un triunghi unei laturi mai mari se opune un unghi mai mare.

2. Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

a) $\frac{a \cos A - b \cos B}{a \cos B - b \cos A} + \cos C = 0, \quad a \neq b.$

b) $\frac{\sin (A - B) \sin C}{1 + \cos (A - B) \cos C} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$

c*) $(a + c) \cos \frac{B}{4} + b \cos \left(A + \frac{3B}{4}\right) = 2c \cos \frac{B}{2} \cos \frac{B}{4}.$

3. În triunghiul ABC, $m(\hat{A}) = 45°$, $AB = a$, $AC = \frac{2\sqrt{2}}{3} a$. Să se arate că $\operatorname{tg} B = 2$.

4. Fie A', B', C' punctele de tangență ale cercului înscris unui triunghi ABC cu laturile acestuia. Să se arate că

$$\frac{\sigma[A'B'C']}{\sigma[ABC]} = \frac{r}{2R}.$$

5*. Să se arate că în orice triunghi ABC

$$\sin \frac{A}{2} \leqslant \frac{a}{2\sqrt{bc}}.$$

6. Să se rezolve triunghiul ABC, cunoscîndu-i elementele A, B și aria S.

7. Să se rezolve triunghiul ABC cunoscînd $a = 13$, $A = \arccos \frac{4}{5}$ și mediana corespunzătoare laturii a, $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{1513}$.

8. Să se calculeze unghiurile triunghiului ABC știind că $B - C = \frac{2\pi}{3}$ și $R = 8r$, unde R și r sînt respectiv razele cercului circumscris și înscris triunghiului.

Capitolul III

Aplicațiile trigonometriei în algebră

În clasa a IX-a s-au introdus numerele complexe și operațiile cu ele. Aceste numere au aplicații variate în geometrie, mecanică, fizică, electrotehnică etc. Pentru a ușura anumite calcule, vom defini forma trigonometrică a numerelor complexe. Reamintim că mulțimea numerelor complexe se notează cu $\mathbf{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbf{R}, i^2 = -1\}$.

§ 1. Forma trigonometrică a unui număr complex

Să considerăm un sistem de coordonate în planul $\mathcal{P}$, reperul fiind (O, A, B) (fig. III.1). Fiecărui număr complex $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbf{R})$ îi asociem un punct unic $M \in \mathcal{P}$ de coordonate (x, y), față de reperul ales, numit *imaginea* numărului complex z.

Am definit în acest fel o funcție bijectivă $f : \mathbf{C} \to \mathcal{P}$. Dacă imaginea lui $z = x + iy$ este punctul M, atunci numărul complex z se numește *afixul* punctului M.

Dacă coordonatele polare ale punctului M sînt r și t^*, atunci conform formulelor

$$x = r\cos t^*, \quad y = r\sin t^*.$$

((1), Cap. II, § 1), numărul complex $z = x + iy$ se scrie:

(1) $$z = r(\cos t^* + i\sin t^*), \quad r \geqslant 0, \quad t^* \in [0, 2\pi).$$

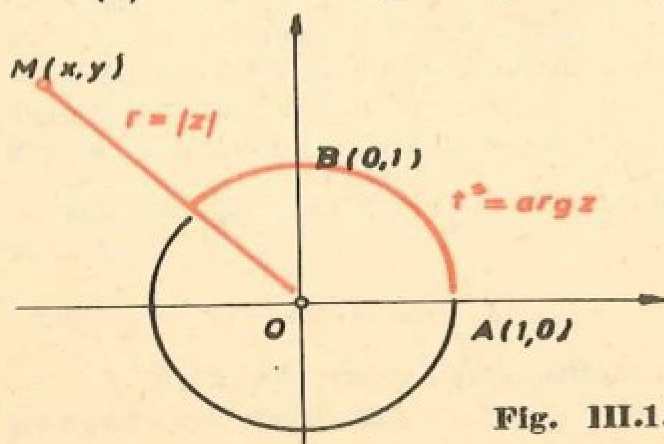


Fig. III.1.

Deoarece $r = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ și $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, rezultă că

(2) $$r = |z|,$$

deci *raza polară a imaginii lui z este egală cu modulul lui z.* Argumentul polar t^* al imaginii lui z se numește *argumentul redus* al lui z și se notează cu $\arg z$.

În concluzie, *orice număr complex z poate fi scris sub forma (1), numită forma trigonometrică a lui z. Dacă $z \neq 0$, modulul și argumentul redus ale lui z sînt determinate unic. Dacă $z = 0$, modulul este egal cu 0 și pentru argumentul său redus se poate lua orice număr din $[0, 2\pi)$.*

Dacă schimbăm pe t^* în $t^* + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, formula (1) rămîne valabilă. Așadar există mai multe valori t pentru care

(3) $$z = r(\cos t + i \sin t), \qquad r \geq 0.$$

Se pune întrebarea dacă pentru un număr dat $z \neq 0$ formula (3) este adevărată și cu valori t diferite de $\arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Fie numărul $z \neq 0$, scris sub forma (3). Se știe că oricare ar fi numărul real t, el poate fi scris ca $t_1 + 2k\pi$ cu $t_1 \in [0, 2\pi)$ și $k \in \mathbb{Z}$. Din (3) rezultă $z = r[\cos(t_1 + 2k\pi) + i \sin(t_1 + 2k\pi)] = r(\cos t_1 + i \sin t_1)$ de unde $r = |z|$, $t_1 = \arg z$ și am ajuns la concluzia că $t = \arg z + 2k\pi$.

Orice număr real t, pentru care relațiile (3) au loc, se numește *argument* al lui z. Mulțimea argumentelor lui z se notează cu Arg z. Conform celor arătate mai sus putem scrie:

(4) $$\text{Arg}\, z = \{t \mid t = \arg z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\},$$

deci *diferența a două argumente ale unui număr complex $z \neq 0$ este un multiplu de 2π.*

Exemple. 1. Fie numărul complex $z = 1 - i$. Să se determine $|z|$, $\arg z$ și Arg z.

Soluție. Deoarece $x = 1$ și $y = -1$, imaginea lui z se află în cadranul IV, adică $t^* = \arg z \in \left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$ și

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}, \ \operatorname{tg} t^* = \frac{y}{x} = -1;$$

deci $t^* = \frac{7\pi}{4}$ (pe fig. III.2, t^* este lungimea arcului mare $\widehat{AC}$). Arg $z = \left\{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. Fie $z = -i$, să se determine $|z|$ și Arg z.

Soluție. $|z| = r = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$. Deoarece $x = 0$ și $y = -1$, imaginea lui z se găsește pe semiaxa negativă a axei ordonatelor, deci $\arg z = \frac{3\pi}{2}$ și

$$\text{Arg}\, z = \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

3. Conjugatul $\bar{z} = x - iy$ al numărului complex $z = x + iy$, cu $y \neq 0$, are argumentul redus

(5) $$\arg \bar{z} = 2\pi - \arg z$$

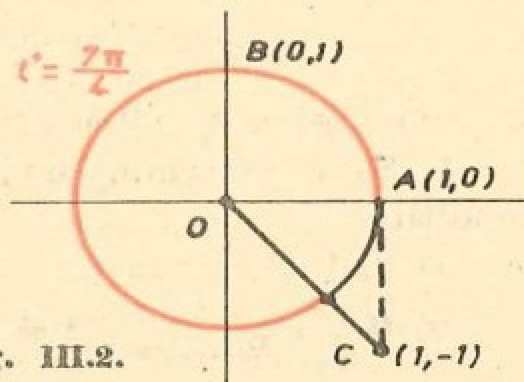


Fig. III.2.

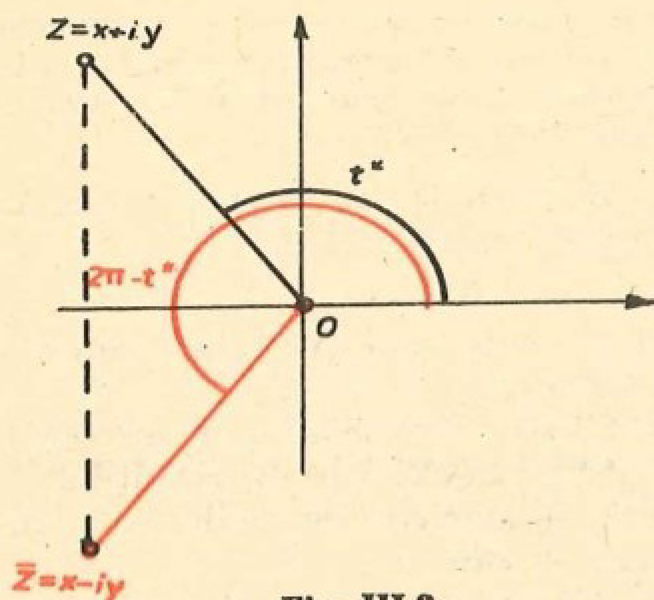


Fig. III.3.

(fig. III.3). Într-adevăr, dacă $|z| = r$ şi $\arg z = t^*$ atunci $\bar{z} = r\cos t^* - ir\sin t^* = r\,[\cos(2\pi - t^*) + i\sin(2\pi - t^*)]$, deci $2\pi - t^* \in \operatorname{Arg} \bar{z}$ şi cum $0 < 2\pi - t^* < 2\pi$, $2\pi - t^* = \arg \bar{z}$.

4. Să se scrie sub formă trigonometrică numărul complex $z = 1 + \cos a + i\sin a$, unde $a \in (0, 2\pi)$.

Soluţie. $r = |z| = \sqrt{(1+\cos a)^2 + \sin^2 a} = \sqrt{2(1+\cos a)} =$

$$= \sqrt{4\cos^2\frac{a}{2}} = 2\left|\cos\frac{a}{2}\right| \text{ şi dacă } a \neq \pi,\ \operatorname{tg} t^* = \frac{\sin a}{1+\cos a} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{2\cdot\cos^2\frac{a}{2}} = \operatorname{tg}\frac{a}{2},\quad t^* = \frac{a}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

1° Dacă $a \in (0, \pi)$, atunci $1 + \cos a > 0$, $\sin a > 0$, şi imaginea lui z se află în cadranul I, deci

$$t^* \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ şi cum } \frac{a}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ obţinem că } t^* = \frac{a}{2}$$

şi

$$z = 2\cos\frac{a}{2}\left(\cos\frac{a}{2} + i\sin\frac{a}{2}\right).$$

2° Dacă $a \in (\pi, 2\pi)$, atunci $1 + \cos a > 0$, $\sin a < 0$ şi imaginea lui z se află în cadranul IV, deci $t^* \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$. Deoarece $\frac{a}{2} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. $t^* = \frac{a}{2} + \pi$ şi

$$z = 2\left|\cos\frac{a}{2}\right|\left[\cos\left(\frac{a}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{a}{2} + \pi\right)\right].$$

3° Dacă $a = \pi$, $z = 0$ şi $\arg z$ nu este determinat.

5. Să se determine mulţimea punctelor din plan al căror afix z verifică condiţiile:

a) $|z| \leqslant 2$.

b) $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$, $z \neq 0$.

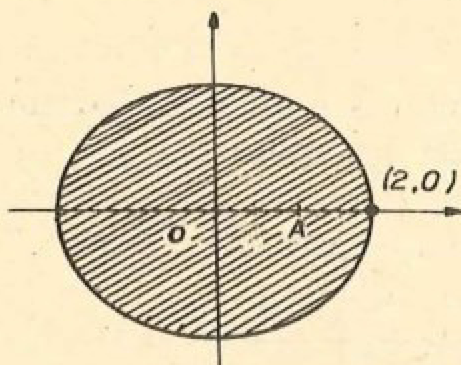


Fig. III.4.

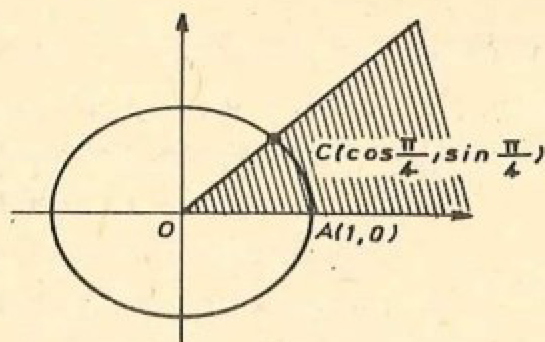


Fig. III.5.

a) Dacă $z = x + iy$, inegalitatea a) este echivalentă cu relaţia $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2$, deci mulţimea cerută este

$$\{M(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\},$$

adică discul $[\mathcal{C}(O, 2)]$ (fig. III.4).

b) Mulţimea căutată este $\{M(x, y) \mid x > 0$ şi $0 < y < x\} = \text{Int}\ \widehat{AOC}$, unde $C\left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right)$ (fig. III.5).

Exerciţii

1. Să se determine mulţimea punctelor din plan ale căror afixe z satisfac:

a) $|z| = 1$; b) $\pi < \arg z \leq \frac{3\pi}{2}$; $z \neq 0$;

c) $\arg z > \frac{4\pi}{3}$, $z \neq 0$; d) $|z + i| \leq 2$.

2. Să se afle forma trigonometrică a următoarelor numere complexe:

$z_1 = 5$; $z_2 = \sqrt{3} + i$, $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$; $z_4 = -i$;

$z_5 = -2$; $z_6 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$; $z_7 = 3 - 2i$, $z_8 = 1 + i\,\text{tg}\,a$, unde $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

3. Să se determine modulele şi argumentele numerelor: $z_1 = \cos a - i\sin a$, $z_2 = \sin a + i\cos a$, $z_3 = \sin a + i(1 + \cos a)$, $z_4 = \cos a + \sin a + i(\sin a - \cos a)$, unde $a \in \mathbf{R}$.

§ 2. Operaţii cu numere complexe scrise sub formă trigonometrică

Operaţia de adunare şi scădere a numerelor complexe scrise sub formă trigonometrică nu prezintă un interes deosebit din punct de vedere al calculării (se adună sau se scad părţile reale, respectiv părţile imaginare).

Înmulţirea numerelor complexe

Fie $z_1 = r_1(\cos t_1 + i \sin t_1)$ şi $z_2 = r_2(\cos t_2 + i \sin t_2)$ două numere complexe. Înmulţind cele două numere complexe avem:

$$z_1z_2 = r_1r_2[(\cos t_1 \cos t_2 - \sin t_1 \sin t_2) + \\ + i(\sin t_1 \cos t_2 + \cos t_1 \sin t_2)] = \\ = r_1r_2[\cos (t_1 + t_2) + i \sin (t_1 + t_2)], \text{ deci}$$

(1) $$\boxed{z_1z_2 = r_1r_2[\cos (t_1 + t_2) + i \sin (t_1 + t_2)]}$$

Rezultă că $|z_1z_2| = r_1r_2$, adică

(2) $$|z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$

şi $t_1 + t_2$ este un argument al lui z_1z_2, deci

(3) $$\text{Arg}(z_1z_2) = \{\arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$$

sau

(3′) $$\arg (z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 - 2k\pi,$$

unde $k \in \{0, 1\}$ se alege astfel ca membrul II să aparţină intervalului $[0,2\pi)$. Astfel am arătat că:

Modulul produsului a două numere complexe este egal cu produsul modulelor celor două numere, iar un argument al produsului este suma a cîte unui argument al numerelor date.

Dacă $z_1 = 0$ sau $z_2 = 0$, argumentul respectiv nu este determinat, dar atunci $z_1z_2 = 0$ şi nici $\arg(z_1z_2)$ nu este determinat.

Rezultă interpretarea geometrică a produsului z_1z_2: dacă M_1, M_2 sînt imaginile lui z_1, z_2 şi P_1, P_2 intersecţiile cercului $\mathscr{C}(O, 1)$ cu $(OM_1$, $(OM_2$, se ia arcul $\widehat{P_2P_3} \equiv \widehat{AP_1}$ în sensul creşterii argumentelor şi se determină punctul $M_3 \in (OP_3$ astfel ca $OM_3 = OM_1 \cdot OM_2$. Atunci M_3 este imaginea lui z_1z_2 (fig. III.6).

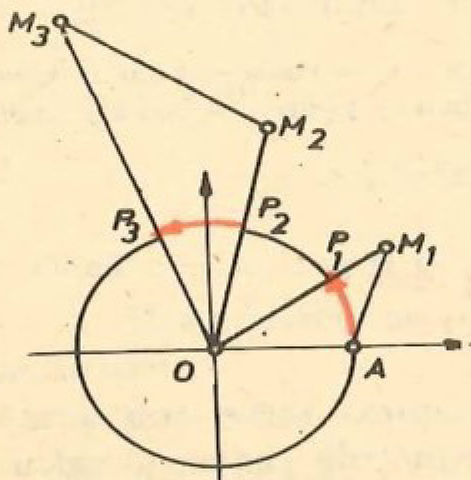


Fig. III.6.

Arătaţi că $\Delta OAM_1 \sim \Delta OM_2M_3$.

Formula (1) se poate generaliza pentru n numere complexe: Dacă

$z_1 = r_1(\cos t_1 + i \sin t_1)$, $z_2 = r_2(\cos t_2 + i \sin t_2)$, ..., $z_n = r_n(\cos t_n + i \sin t_n)$, atunci

(4) $$z_1z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = \\ = r_1r_2 \cdot \ldots \cdot r_n[\cos (t_1 + t_2 + \ldots + t_n) + \\ + i \sin (t_1 + t_2 + \ldots + t_n)].$$

Demonstraţi formula (4) prin inducţie matematică!

Exemplu. Să se determine modulul şi argumentul redus al produsului $(-1+i\sqrt{3})(2-2i)$.

Soluţie. $z_1 = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ şi $z_2 = 2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$, deci

$$z_1z_2 = 4\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{7\pi}{4}\right)\right] =$$
$$= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{29\pi}{12} + i\sin\frac{29\pi}{12}\right).$$

Astfel $|z_1z_2| = 4\sqrt{2}$ şi $\arg z_1z_2 = \frac{29\pi}{12} - 2\pi = \frac{5\pi}{12}$.

Ridicarea la putere a unui număr complex

Fie $z = r(\cos t + i\sin t)$ un număr complex şi $n \in \mathbb{N}^*$. Aplicînd formula (4) în cazul $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$, obţinem

$$z^n = \underbrace{r\cdot r\cdot\ldots\cdot r}_{n \text{ ori}}[\cos\underbrace{(t+t+\ldots+t)}_{n \text{ ori}} + i\sin\underbrace{(t+t+\ldots+t)}_{n \text{ ori}}] =$$
$$= r^n(\cos nt + i\sin nt), \text{ adică}$$

5) $$\boxed{z^n = r^n(\cos nt + i\sin nt)}$$

Se observă, că

$$|z^n| = |z|^n \text{ şi } \operatorname{Arg} z^n = \{n\arg z + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemplu. Să se calculeze $(1-i)^{24}$.

Soluţie. Forma trigonometrică a numărului $z = 1 - i$ este $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$, deci aplicînd formula (5) avem $z^{24} = 2^{12}(\cos 42\pi + i\sin 42\pi) = 2^{12}(\cos 0 + i\sin 0) = 2^{12}$.

În cazul $r = |z| = 1$ formula (5) ne dă

(6) $$\boxed{(\cos t + i\sin t)^n = \cos nt + i\sin nt}$$

Formula (6) valabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, se numeşte *formula lui Moivre.*

Aplicaţie. Folosind formula lui Moivre putem afla formule pentru $\cos 3t$ şi $\sin 3t$. Avem în virtutea lui (6):

(7) $$(\cos t + i\sin t)^3 = \cos 3t + i\sin 3t.$$

Calculînd direct putem scrie

$$(\cos t + i\sin t)^3 = \cos^3 t + 3i\cos^2 t\sin t + 3i^2\cos t\sin^2 t + i^3\sin^3 t =$$
$$= \cos^3 t - 3\cos t\sin^2 t + i(3\cos^2 t\cdot\sin t - \sin^3 t).$$

Ţinînd seama şi de (7) se obţine:

$$\cos 3t = \cos^3 t - 3 \cos t \sin^2 t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t$$
$$\sin 3t = 3 \cos^2 t \sin t - \sin^3 t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t.$$

Împărţirea a două numere complexe

Fie $z_1 = r_1(\cos t_1 + i \sin t_1)$ şi $z_2 = r_2(\cos t_2 + i \sin t_2) \neq 0$ două numere complexe şi

(8) $$\frac{z_1}{z_2} = z = r(\cos t + i \sin t).$$

Atunci $zz_2 = z_1$, deci conform formulelor (2) şi (3′)

$$rr_2 = r_1 \text{ şi } t + t_2 = t_1 + 2k\pi, \text{ unde } k \in \mathbb{Z}.$$

Aşadar

$$r = \frac{r_1}{r_2} \text{ şi } t = (t_1 - t_2) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

şi înlocuind aceste valori în (8) obţinem

(9) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(t_1 - t_2) + i \sin(t_1 - t_2)].$$

Putem scrie:

(10) $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{Arg}\,\frac{z_1}{z_2} = \{\arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Astfel am arătat că:

Modulul cîtului a două numere complexe, diferite de zero, este egal cu cîtul modulelor celor două numere, iar un argument al cîtului este diferenţa a cîte unui argument al numerelor date.

Din construcţia imaginii produsului rezultă şi construcţia imaginii cîtului. Pe figura III.7 M_1, M_2, Q sînt respectiv imaginile lui z_1, z_2, $\frac{z_1}{z_2}$.

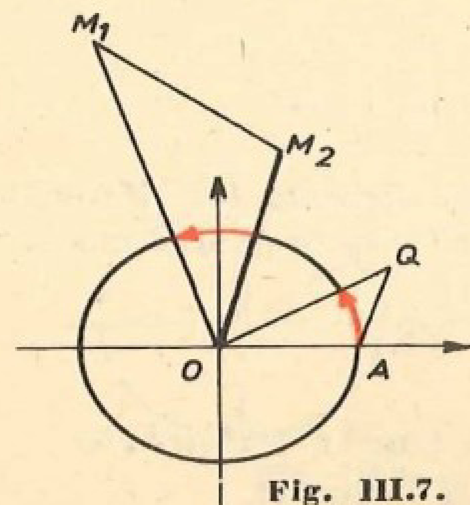


Fig. III.7.

Exemplu. Să se determine modulul şi argumentul redus al numărului $z = \frac{(1+i)^8}{(\sqrt{3} - i)^8}$.

Soluţie.

$$z = \frac{\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^8}{\left[2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \sin\frac{11\pi}{6}\right)\right]^3} =$$

$$= \frac{2^4(\cos 2\pi + i \sin 2\pi)}{2^3\left(\cos\frac{11\pi}{2} + i \sin\frac{11\pi}{2}\right)} =$$

$$= 2\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{2}\right) + i\ \sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right)\right] = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\ \sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i.$$

Astfel $|z| = 2$ şi $\arg z = \frac{\pi}{2}$.

Exerciţii

1. Să se calculeze produsul $(2\sqrt{3} + 2i)(-1 + i)(-1 - i\sqrt{3})$ sub formă trigonometrică.

2. Să se determine modulele şi argumentele reduse ale următoarelor numere complexe:

a) $(2 + i\sqrt{12})^6$; b) $(-1 + i)^6$; c) $\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}\right)^{16}$;

d) $\left(\frac{4}{\sqrt{3}i - 1}\right)^{12}$; e) $\frac{(\sqrt{3} - i)^{16}}{(1 + i)^9} + \frac{(\sqrt{3} + i)^{16}}{(1 - i)^9}$;

f) $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^9$.

3. Să se calculeze:

a) $(-1 + i\sqrt{3})^{60}$; b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{12}$;

c) $(1 - \cos a + i \sin a)^n$, $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

4. Ştiind că $z + \frac{1}{z} = 2\cos a$, $a \in \mathbf{R}$, să se calculeze

$$z^n + \frac{1}{z^n}.$$

5. Să se demonstreze că formula lui Moivre este adevărată şi în cazul cînd n este un număr întreg negativ.

6. Să se demonstreze

$$\left(\frac{1 + i\,\mathrm{tg}\,t}{1 - i\,\mathrm{tg}\,t}\right)^n = \frac{1 + i\,\mathrm{tg}\,nt}{1 - i\,\mathrm{tg}\,nt},\ t \in \mathbf{R} - \left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\right\} \text{ şi } n \in \mathbf{N}^*.$$

§ 3. Rădăcina de ordinul n dintr-un număr complex

Definiţie. Fie z un număr complex nenul şi $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Se numeşte *rădăcină de ordinul n a lui z* orice număr complex Z, care verifică ecuaţia

(1) $$Z^n = z.$$

Teoremă. Fie $z = r(\cos t^* + i \sin t^*)$ un număr complex, $\arg z = t^*$. Numărul z are n rădăcini distincte de ordinul n, şi anume:

(2) $$Z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t^* + 2k\pi}{n} + i\ \sin\frac{t^* + 2k\pi}{n}\right),$$
$$k \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}.$$

Demonstrație. Scriind pe Z sub formă trigonometrică $Z = R(\cos T + i \sin T)$, $R > 0$, $T \in \mathbb{R}$, ecuația (1) este echivalentă cu relațiile:

(3) $$R^n = r,$$

(4) $$nT = t^* + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Deoarece r este un număr real pozitiv, rezultă că ecuația (3) are o soluție unică: $R = \sqrt[n]{r}$. Din (4) rezultă că

(5) $$T = \frac{t^* + 2k\pi}{n}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Am obținut mulțimea rădăcinilor de ordinul n ale lui z:

(6) $$Z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t^* + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{t^* + 2k\pi}{n}\right), \ k \in \mathbb{Z}.$$

Se pune problema: cîte dintre valorile Z_k sînt distincte? Pentru $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ obținem argumente reduse diferite:

(7) $$T_0 = \frac{t^*}{n}, \ T_1 = \frac{t^* + 2\pi}{n}, \ T_2 = \frac{t^* + 4\pi}{n}, \ldots,$$
$$T_k = \frac{t^* + 2k\pi}{n}, \ldots, T_{n-1} = \frac{t^* + 2(n-1)\pi}{n},$$

deoarece pentru $\forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, $T_k \in [0, 2\pi)$, iar diferența dintre T_i și T_k nu este multiplu întreg de 2π, dacă $i \neq k$.

Pentru $k = n$ obținem

$$T_n = \frac{t^* + 2n\pi}{n} = \frac{t^*}{n} + 2\pi,$$

care diferă de T_0 cu 2π, deci $Z_n = Z_0$. Dacă k este un întreg oarecare, îl scriem sub forma $k = q \cdot n + r$ cu $r, q \in \mathbb{Z}$ și $0 \leqslant r < n$ și observăm că

$$T_k = \frac{t^* + 2(qn + r)\pi}{n} = \frac{t^* + 2r\pi}{n} + 2q\pi,$$

deci $Z_k = Z_r$ și astfel am demonstrat că printre numerele complexe (6) există exact n numere distincte:

$$Z_0, Z_1, \ldots, Z_{n-1}.$$

În particular, dacă $z = 1$, rădăcinile ecuației

(8) $$Z^n = 1$$

se numesc *rădăcinile de ordinul n ale unității.*

Deoarece $1 = \cos 0 + i \sin 0$, rădăcinile de ordinul n ale unității, pe care le notăm cu ε_k, sînt:

(9) $$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}, \ k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Problemă rezolvată. *Imaginile rădăcinilor de ordinul $n(n \geq 3)$ ale unui număr complex $z \neq 0$ sînt vîrfurile unui poligon regulat cu n laturi, înscris în cercul de centru O şi de rază $|z|^{\frac{1}{n}}$.*

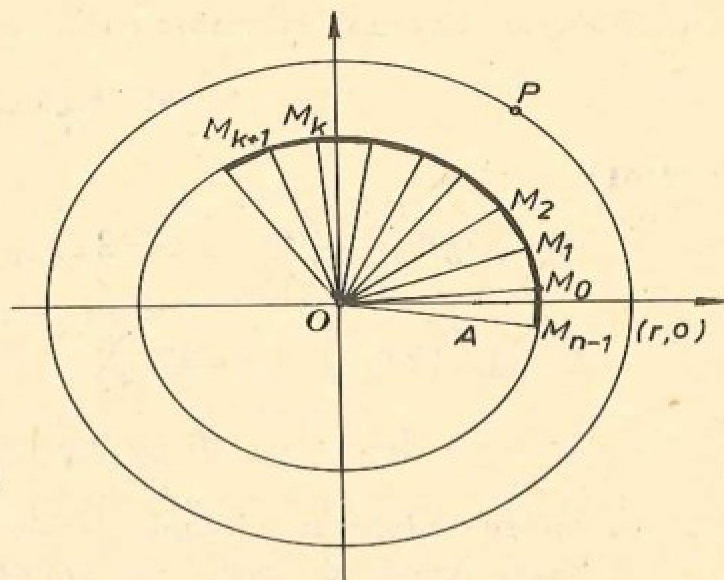


Fig. III.8.

Rezolvare. Fie $z = r(\cos t^* + i \sin t^*)$ un număr complex scris sub formă trigonometrică, $t^* = \arg z$, $|z| = r$. Imaginea lui z este un punct P pe cercul $\mathscr{C}(O, r)$ (fig. III.8). Fie $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ imaginile lui $Z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos \frac{t^* + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{t^* + 2k\pi}{n}\right)$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Deoarece $OM_k = |Z_k| = \sqrt[n]{r}$, aceste puncte aparţin cercului $\mathscr{C}(O, \sqrt[n]{r})$. Pe de altă parte imaginile M_k, M_{k+1} ale numerelor complexe Z_k, Z_{k+1} sînt două puncte pe acest cerc, pentru care

$$\arg Z_k = \frac{t^* + 2k\pi}{n}, \quad \arg Z_{k+1} = \frac{t^* + 2(k+1)\pi}{n}.$$

Diferenţa celor două argumente este măsura unghiului

$$\widehat{M_k O M_{k+1}},$$

deci

$$\mu(\widehat{M_k O M_{k+1}}) = \arg Z_{k+1} - \arg Z_k = \frac{2\pi}{n},$$

şi astfel arcele mici $\widehat{M_0M_1}, \widehat{M_1M_2}, \widehat{M_2M_3}, \ldots, \widehat{M_kM_{k+1}}, \ldots, \widehat{M_{n-1}M_0}$ sînt congruente şi le corespund coarde congruente:

$$(M_0M_1) \equiv (M_1 M_2) \equiv \ldots \equiv (M_kM_{k+1}) \equiv$$
$$\equiv \ldots \equiv (M_{n-1}M_0),$$

deci problema este rezolvată.

Se observă că în cazul rădăcinilor de ordinul n ale unităţii $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$, imaginile acestora sînt vîrfurile unui poligon regulat cu n laturi, înscris în cercul $\mathscr{C}(O, 1)$, unde vîrful M_0 are coordonate $(1, 0)$, deoarece $\varepsilon_0 = 1$ (fig. III.9 în cazul $n = 6$).

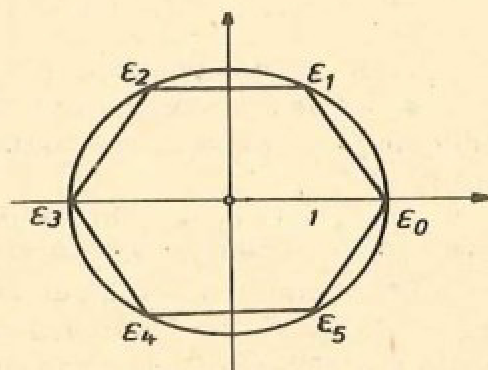


Fig. III. 9.

Exemple **1.** Să se calculeze rădăcinile de ordinul 3 ale lui $-8i$.

Soluție. Forma trigonometrică a numărului complex

$$-8i \text{ este } 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

Astfel

$$Z_k = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right].\ k \in \{0, 1, 2\}.$$

$$Z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i,\ Z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) =$$

$$= -\sqrt{3} - i,\ Z_2 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i.$$

2. Să se calculeze rădăcinile de ordinul 6 ale unității.

Soluție. Avem de rezolvat ecuația $Z^6 = 1$. Rădăcinile ecuației sînt:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3},\ \text{unde } k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\},$$

adică

$$\varepsilon_0 = 1,\ \varepsilon_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon_3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1,\ \varepsilon_4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} =$$

$$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \varepsilon_5 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exerciții

1. Să se calculeze rădăcinile de ordinul n ale lui z în următoarele cazuri:

a) $n = 2, z = i$; b) $n = 6, z = -i$; c) $n = 4, z = \sqrt{3} + i$; d) $n = 3$, $z = \frac{1+i}{1-i}$.

2. Să se determine rădăcinile de ordinul 3, 4 și 8 ale unității.

3. Să se demonstreze că rădăcinile de ordinul n ale unității sînt egale cu puterile unei rădăcini particulare ε_1. (O astfel de rădăcină se numește *rădăcină primitivă* de ordinul n a unității.)

4. $\varepsilon_0 = 1$, ε_1, ε_2 fiind rădăcinile de ordinul trei ale unității, să se arate că: $\varepsilon_2 = \bar{\varepsilon}_1$, $(\varepsilon_1)^2 = (\varepsilon_1)^{-1} = \varepsilon_2$ și $(\varepsilon_2)^2 = (\varepsilon_2)^{-1} = \varepsilon_1$.

5*. Știind că numărul complex Z verifică ecuația $Z^4 = z$, să se arate că numerele $-Z$, iZ și $-iZ$ verifică aceeași ecuație. *Aplicație*: Să se calculeze $(1 - 2i)^4$ și să se deducă rădăcinile de ordinul patru ale numărului $-7 + 24i$.

6*. Să se arate că, dacă numerele naturale m și n sînt prime între ele, atunci ecuațiile $z^m - 1 = 0$ și $z^n - 1 = 0$ au o singură rădăcină comună.

§ 4. Ecuații binome

Definiție. O ecuație de forma

(1) $$z^n + c = 0,\ c \in \mathbf{C},\ n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 2$$

se numește *ecuație binomă.*

Pentru a rezolva ecuația (1) vom scrie numărul $-c$ sub formă trigonometrică. Astfel ecuația (1) este echivalentă cu

$$z^n = r(\cos t + i \sin t),$$

deci rădăcinile ecuației (1) sînt rădăcinile de ordinul n ale numărului complex $-c$. Astfel, ecuația dată are n rădăcini diferite.

Exemple. **1.** Să se rezolve ecuația binomă $z^3 - 8 = 0$.

Soluție. Forma trigonometrică a numărului 8 este $8(\cos 0 + i \sin 0)$. Rădăcinile ecuației sînt:

$$z_k = 2\left(\cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}\right),\ k \in \{0, 1, 2\};\ z_0 = 2,$$

$$z_1 = -1 + i\sqrt{3};\quad z_2 = -1 - i\sqrt{3}.$$

2. Să se rezolve ecuația

$$z^8 + (1 - i)z^4 - i = 0.$$

Soluție. Ecuația dată este o ecuație de gradul doi în z^4. Obținem: $z^4 = i$ sau $z^4 = -1$. Soluțiile acestor ecuații binome sînt:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1 \pm i),\ \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{2 - \sqrt{2}} \pm i\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right).$$

3. Scriind rădăcinile ecuației $z^5 - 1 = 0$ sub formă trigonometrică și rezolvînd această ecuație și pe cale algebrică, să se afle $\cos \frac{2\pi}{5}$ și $\sin \frac{2\pi}{5}$. Să se deducă valorile lui $\sin \frac{\pi}{10}$, $\cos \frac{\pi}{10}$, $\sin \frac{\pi}{5}$, $\cos \frac{\pi}{5}$ și să se calculeze lungimile laturilor unui decagon regulat și ale unui pentagon regulat, înscrise într-un cerc de rază R.

Soluție. Rădăcinile ecuației $z^5 - 1 = 0$ sînt

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5},\ k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Pe de altă parte $z^5 - 1 = (z - 1)z^2\left(z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1\right)$ și notînd $z + \frac{1}{z} = y$ (în conformitate cu metoda de rezolvare a ecuațiilor reciproce), găsim $z^2 + \frac{1}{z^2} = y^2 - 2$.

$$y^2 + y - 1 = 0,\ y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

deci

$$z^2 + \frac{\alpha\sqrt{5}+1}{2} z + 1 = 0, \text{ unde } \alpha = \pm 1.$$

$$z_{1,2,3,4} = -\frac{\alpha\sqrt{5}+1}{4} \pm i\frac{\sqrt{10-2\alpha\sqrt{5}}}{4}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

de unde

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\cos\frac{\pi}{10} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\sin\frac{\pi}{10} = \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4};$$

$$\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{2\pi}{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \quad \cos\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{5}+1}{4};$$

$$l_{10} = 2R\sin\frac{\pi}{10} = R\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad l_5 = 2R\sin\frac{\pi}{5} = R\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$$

Exerciții

1. Să se rezolve următoarele ecuații binome:
a) $z^3 - 27 = 0$, b) $z^4 + 625 = 0$, c) $z^3 + 1 = 0$, d) $(2-3i)z^6 + 1 + 5i = 0$.
2. Să se rezolve ecuațiile:
a) $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$, b) $z^8 - 2z^4 + 2 = 0$,
c) $z^4 + 6(1+i)z^2 + 5 + 6i = 0$, d) $z^6 - 7iz^3 + 8 = 0$.
3. Să se rezolve ecuația $\bar{z} = z^{n-1}$, $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$, unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.
Indicație. $|z^{n-1}| = |z|^{n-1}$ și deoarece $|\bar{z}| = |z|$, rezultă $|z| = 0$ sau $|z| = 1$. În cazul $z \neq 0$, înmulțim ecuația dată cu z și obținem $z^n = 1$.

§ 5. Aplicații ale numerelor complexe în geometrie

Probleme rezolvate. Dacă punctele M_1, M_2 au afixele z_1, z_2, atunci mijlocul M al segmentului $[M_1 M_2]$ are afixul $\frac{z_1+z_2}{2}$.

Rezolvare. Fie $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Deoarece coordonatele lui M_1, M_2 sînt (x_1, y_1), (x_2, y_2), M are coordonatele $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Rezultă că afixul lui M este

$$\frac{x_1+x_2}{2} + i\frac{y_1+y_2}{2} = \frac{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)}{2} = \frac{z_1+z_2}{2}.$$



Fig. III.10.

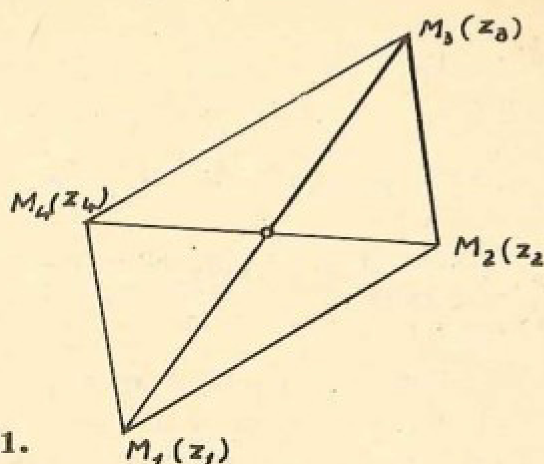


Fig. III.11.

Problema 2. Dacă punctele M_1, M_2, M_3, M_4 sînt coliniare și segmentele $[M_1M_3]$, $[M_2M_4]$ au același mijloc, atunci $M_1M_2M_3M_4$ se numește *paralelogram degenerat* (fig. III.10). Să se demonstreze că imaginile numerelor complexe z_1, z_2, z_3, z_4 ***sînt vîrfurile unui paralelogram $M_1M_2M_3M_4$ (propriu sau degenerat) dacă și numai dacă***

(1) $$z_1 + z_3 = z_2 + z_4.$$

Rezolvare. Dacă $M_1M_2M_3M_4$ este un paralelogram propriu sau degenerat (fig. III.11) $[M_1M_3]$ și $[M_2M_4]$ au același mijloc. Deci afixele z_i ale punctelor M_i verifică relația

$$\frac{z_1 + z_3}{2} = \frac{z_2 + z_4}{2}$$

și rezultă (1). Reciproc, din (1) deducem că $[M_1M_2]$ și $[M_2M_4]$ au același mijloc. Dacă punctele M_i nu sînt coliniare $M_1M_2M_3M_4$ este un paralelogram propriu-zis, iar dacă sînt coliniare, atunci conform definiției, $M_1M_2M_3M_4$ este un paralelogram degenerat.

Observație. Dacă M, M' sînt imaginile lui z, z', atunci imaginea sumei $z + z'$ este cel de-al patrulea vîrf P al paralelogramului (eventual degenerat) $MOM'P$ (fig. III. 12), *iar ima-ginea diferenței $z - z'$ este vîrful Q al paralelogramului $OM'MQ$* (fig. III.13).

Deoarece $MM' = OQ$, avem și următorul

Corolar. *Dacă M, M' au afixele z, z', atunci*

(2) $$M'M = |z - z'|.$$

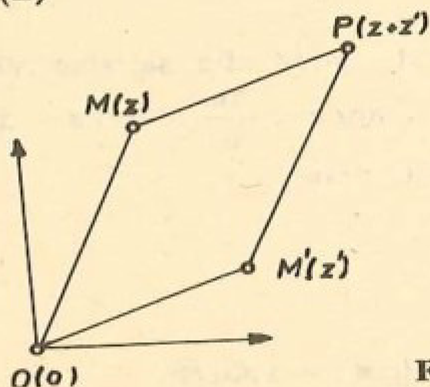
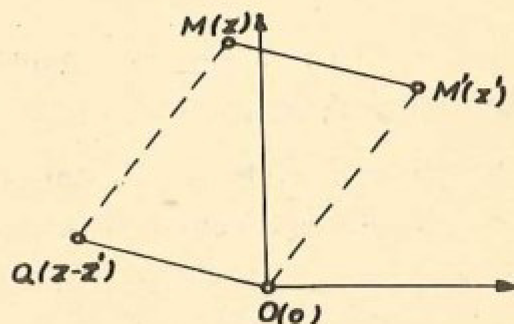


Fig. III.12.



III.13.

Exerciţii

1. Să se arate că mijloacele laturilor unui patrulater oarecare sînt vîrfurile unui paralelogram.

2. Fie $M_1M_2M_3M_4$ şi $N_1N_2N_3N_4$ două paralelograme şi P_i mijloacele segmentelor $[M_iN_i]$, $i \in (1, 2, 3, 4)$. Să se arate că $P_1P_2P_3P_4$ este un paralelogram sau un paralelogram degenerat.

3. Fie funcţia $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f(z) = az + b (a, b \in \mathbf{C}, a \neq 0)$. Dacă M_1 şi M_2 sînt de afixe z_1 şi z_2, iar M'_1 şi M'_2 de afixe $f(z_1)$ şi $f(z_2)$, să se arate că

(3) $$M'_1M'_2 = |a| \cdot M_1M_2.$$

Avem

(4) $$M'_1M'_2 = M_1M_2, \text{ dacă şi numai dacă } |a| = 1.$$

(Egalitatea (3) defineşte asemănarea, iar egalitatea (4) defineşte izometria.)

4. Arătaţi că funcţia $z \to \bar{z}$, $z \in \mathbf{C}$ defineşte o izometrie. (Vezi exerciţiul 3.)

5. Fie M_1, M_2 de afixe $z_1, z_2 \neq 0$ şi $z_2 = \alpha z_1$. Să se arate că semidreptele $(OM_1$, $(OM_2$ coincid (respectiv sînt opuse) dacă şi numai dacă $\alpha > 0$ (respectiv $\alpha < 0$).

6. Se consideră punctele M_1, M_2, M_3 de afixe z_1, z_2, z_3, $M_1 \neq M_2$. Să se arate:

a) $M_3 \in (M_1M_2 \Leftrightarrow \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} > 0.$

b) $M_3 \in M_1M_2 \Leftrightarrow \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbf{R}.$

Indicaţie. Se construiesc imaginile lui $z_2 - z_1$ şi $z_3 - z_1$ în conformitate cu problema 2 rezolvată şi se ţine cont de exerc. 5.

7*. Demonstraţi teorema lui Pompeiu: Dacă punctul M din planul triunghiului echilateral $M_1M_2M_3$ nu aparţine cercului circumscris triunghiului $M_1M_2M_3$, atunci există un triunghi avînd lungimile laturilor MM_1, MM_2, MM_3.

Indicaţie. Putem presupune că afixele lui M_1, M_2, M_3 sînt 1, ε, ε^2 unde $\varepsilon^3 = 1$. Se foloseşte egalitatea $(z - 1)(\varepsilon^2 - \varepsilon) + (z - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2) = (z - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon)$, valabilă pentru orice $z \in \mathbf{C}$.

Exerciţii recapitulative

1. Să se reprezinte mulţimile punctelor din plan ale căror afix satisfac relaţiile a) $|z| \geqslant 1$; b) $1 < |z - 1| < 2$; c) $|z - \mathrm{i})| < 1$; d) $0 < \arg z < \dfrac{5\pi}{6}$; e) $|z - z_1| = |z - z_2|$, unde z_1 şi z_2 sînt afixele a două puncte fixe din plan.

2. Să se efectueze calculele:

a) $E_1 = \dfrac{\sqrt{3} + \mathrm{i}}{(\sqrt{3} - \mathrm{i})^5}$,

b) $E_2 = 1 + 3(\cos t + \mathrm{i} \sin t) + 3(\cos t + \mathrm{i} \sin t)^2 + (\cos t + \mathrm{i} \sin t)^3$.

3. Fie expresia $E(z) = z^4 - z^3 + z^2 + 1 - \mathrm{i}$; să se calculeze $E(1 + \mathrm{i})$.

4. Să se afle poziţia celui de al treilea vîrf al triunghiului echilateral, afixele a două vîrfuri fiind $z_1 = 1$; $z_2 = 2 + i$.

5*. Fie z_1, z_2, z_3 trei numere complexe, nenule, distincte două cîte două şi de module egale. Să se demonstreze că, dacă $z_1 + z_2z_3$; $z_2 + z_3z_1$ şi $z_3 + z_1z_2$ sînt numere reale, atunci $z_1z_2z_3 = 1$.

6. Notînd cu G mulţimea rădăcinilor de ordinul n ale unităţii, $G = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1})$, să se demonstreze că

a) $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \in G, \ \forall i, j \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$,

b) $\varepsilon_i^{-1} \in G, \ \forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

7. Să se determine numerele complexe de modul unu care satisfac relaţia:

$$\left| \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \right| = 1.$$

8*. Fie ecuaţia $az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c \in \mathbf{C}$ şi $\arg a + \arg c = 2 \arg b$ şi $|a| + |c| = |b|$. Să se arate că ecuaţia dată are cel puţin o rădăcină de modul unitar.

9*. Fie z_1, z_2, z_3 trei numere complexe nenule, astfel ca $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.

a) Să se demonstreze că există numerele complexe α şi β astfel ca $z_2 = \alpha z_1$, $z_3 = \beta z_1$ şi $|\alpha| = |\beta| = 1$.

b) Să se rezolve ecuaţia $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 = 0$ în raport cu una dintre necunoscute.

c) Folosind eventual rezultatele de la punctele a) şi b) să se demonstreze că dacă $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3$, atunci avem $z_1 = z_2 = z_3$, sau numerele z_1, z_2 şi z_3 sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral.

Capitolul IV

Incidenţa, ordonarea şi paralelismul în spaţiu

§ 1. Axiomele geometriei în spaţiu

Noţiunile fundamentale ale geometriei în spaţiu sînt: *punctul*, *dreapta*, *planul*, *distanţa* şi *măsura unghiurilor*, noţiuni întîlnite în geometria plană, la care se mai adaugă noţiunea de *spaţiu*. În geometria plană există un singur plan, în geometria în spaţiu vom avea mai multe plane.

Axiomele de incidenţă în spaţiu sînt următoarele:

I. 1. Spaţiul este o mulţime de puncte, care se notează cu $\mathcal{S}$.

I. 2. Dreptele şi planele sînt submulţimi ale lui $\mathcal{S}$.

I. 3. Orice dreaptă conţine cel puţin două puncte distincte. Orice plan conţine cel puţin trei puncte necoliniare. Există patru puncte nesituate într-un acelaşi plan.

I. 4. Prin orice două puncte distincte A şi B trece o singură dreaptă, care se notează cu AB.

I. 5. Prin orice trei puncte trece cel puţin un plan.

I. 6. Dacă două plane diferite au un punct comun, atunci intersecţia lor este o dreaptă În acest caz cele două plane se zic *secante*.

Dacă anumite puncte sau drepte sînt situate într-un acelaşi plan, spunem că ele sînt *coplanare*.

Observaţie. Din axiome deducem uşor că *există cel puţin un plan*, şi *există cel puţin o dreaptă*. Într-adevăr, ştim că există patru puncte distincte A, B, C, D (axioma I.3). Din I.5 respectiv I.4 rezultă că există cel puţin un plan conţinînd punctele A, B, C şi cel puţin o dreaptă ce conţine punctele A şi B.

Axioma I.5 arată că trei puncte date aparţin cel puţin unui plan. Teorema ce urmează completează axioma I.5, stabilind că dacă punctele sînt *necoliniare*, atunci planul este unic.

Teorema 1. Prin orice trei puncte necoliniare A, B, C trece un singur plan, care va fi notat cu (ABC).

Demonstraţie. Ţinînd seama de axioma I.5 este suficient să arătăm că nu pot exista două plane distincte conţinînd punctele A, B, C. Presupunem contrariul. Atunci există planele distincte α şi β astfel ca $A,B,C \in \alpha$ şi $A,B,C \in \beta$. Rezultă că $\alpha \cap \beta$ este o dreaptă, în contradicţie cu ipoteza.

Teorema 2. Dacă o dreaptă d are două puncte distincte situate într-un plan α, atunci dreapta d este inclusă în planul α.

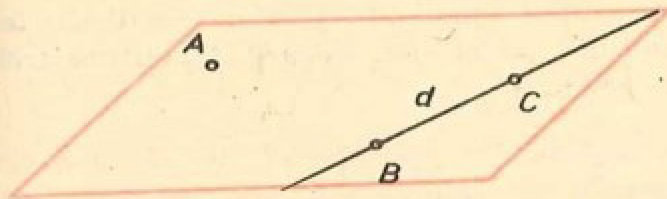


Fig. IV.1.

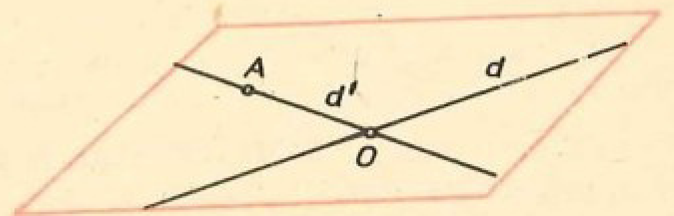


Fig. IV.2.

Demonstrație. Fie A și B cele două puncte distincte ale lui d conținute în planul α. Putem găsi un punct $C \notin \alpha$, căci în caz contrar întregul spațiu ar fi inclus în α, în contradicție cu I.3. Știm din axioma I.5 că există un plan β care conține punctele A, B, C și cum $C \notin \alpha$, planele α și β sînt distincte. Dar A și B aparțin și lui α și lui β, deci $\alpha \cap \beta$ este o dreaptă (axioma I.6), iar în virtutea lui I.4, $\alpha \cap \beta = AB = d$, prin urmare $d \subset \alpha$.

T e o r e m a 3. Dacă d este o dreaptă și A un punct nesituat pe d, atunci există un singur plan care conține dreapta d și punctul A. El va fi notat cu (dA) sau (Ad).

Demonstrație. Pe dreapta d există două puncte distincte B și C (I.3), (fig. IV.1). Planul (ABC) include întreaga dreaptă d, căci conține două puncte ale lui d (teorema 2). Așadar, (ABC) este un plan ce conține pe A și d.

Fie α un plan oarecare, care conține pe A și d. Planele α și (ABC) avînd în comun punctele nocoliniare A, B, C, din teorema 1 rezultă că $\alpha = (ABC)$. Așadar (ABC) este unicul plan conținînd dreapta d și punctul A.

T e o r e m a 4. Dacă d și d' sînt două drepte distincte cu un punct comun O (fig. IV.2), atunci există un singur plan care conține aceste drepte. El se notează cu $(d\ d')$.

Demonstrație. Se ia un punct $A \in d'$, $A \neq O$ și se aplică teorema 3 dreptei d și punctului A.

Exerciții

◇ **1.** Să se arate că dacă o dreaptă d nu este conținută într-un plan α, atunci intersecția $d \cap \alpha$ este fie mulțimea vidă, fie este formată dintr-un singur punct.

2. Să se arate că oricare ar fi planul α, există cel puțin un punct nesituat în planul α.

◇ **3.** Există două drepte fără punct comun.

4. Să se arate că fiind dată o dreaptă oarecare d, există cel puțin două plane care conțin dreapta d.

Indicație. Arătați că există un punct $A \notin d$. Prin d și A trece planul $\alpha = (Ad)$. Există $B \notin \alpha$ (axioma I.3). Planele α și $\beta = (Bd)$ sînt distincte și fiecare conține dreapta d.

◇ **5.** Se consideră dreptele d, d', d'' astfel ca, luate cîte două, să se intersecteze. Să se arate că atunci cele trei drepte au un punct comun, sau sînt așezate într-un același plan.

6. Fie A, B, C trei puncte necoliniare și D un punct nesituat în planul (ABC). Să se arate: a) punctele D, A, B nu sînt coliniare și nici D, B, C; D, C, A; b) intersecția planelor (DAB), (DBC), (DCA) este formată dintr-un singur punct.

7. Folosind notațiile exercițiului 6, se iau punctele E, F, G, distincte de A, B, C, D astfel ca $E \in AD$, $F \in BD$, $G \in CD$; fie $BC \cap FG = \{P\}$, $GE \cap CA = \{Q\}$, $EF \cap AB = \{R\}$. Să se arate că punctele P, Q, R sînt coliniare (teorema lui Desargues).

8. Se consideră dreptele d și d', nesituate într-un același plan și punctele distincte $A, B, C \in d$ și $D, E \in d'$. Cîte plane diferite putem duce astfel încît fiecare să conțină trei puncte necoliniare dintre punctele date? Generalizare.

Teorema 5. Oricare ar fi planul α, mulțimea punctelor și mulțimea dreptelor situate în planul α satisfac axiomele de incidență ale geometriei în plan.

Demonstrație. Este clar că primele trei axiome de incidență ale geometriei în plan sînt verificate. Rămîne de arătat că dacă A, B sînt puncte distincte ale lui α, atunci există o singură dreaptă d situată în α, cu proprietatea $A \in d$, $B \in d$. Axioma I.4 ne asigură că AB este singura dreaptă cu $A \in d$, $B \in d$. Dar ea este situată în α în virtutea teoremei 2.

Admitem axioma riglei, axiomele unghiului și axioma de congruență, chiar sub forma în care ele sînt enunțate în geometria plană. Admitem axioma de separare pentru fiecare plan.

Acestea sînt axiomele *geometriei absolute în spațiu.*

Rezultă că în fiecare plan sînt valabile axiomele geometriei absolute plane, deci sînt adevărate toate teoremele demonstrate în Capitolul I al manualului pentru clasa a IX-a. Mai mult, două segmente congruente nu trebuie să fie așezate în același plan, nici două unghiuri congruente. Axioma de congruență se referă acum la două triunghiuri ABC și $A'B'C'$, situate în același plan sau în plane diferite. Teoremele de congruență ale triunghiurilor se extind imediat la două triunghiuri în plane diferite.

În ceea ce privește relațiile „dreapta d separă punctele A și B" și „dreapta d nu separă punctele A și B", ele au sens numai în cazul cînd d, A și B sînt situate în același plan și bineînțeles $A, B \notin d$ (prima relație înseamnă că $[AB] \cap d \neq \varnothing$, a doua înseamnă că $[AB] \cap d = \varnothing$). De acest fapt trebuie să ținem seama în enunțul axiomei de separare, cînd ne referim la geometria în spațiu:

Axioma de separare. Fie d o dreaptă inclusă în planul α și $A, B, C \in \alpha - d$. Dacă dreapta d separă punctele A și B și nu separă B și C, atunci dreapta d separă A și C.

Definiție. Două drepte se numesc *paralele* dacă sînt **coplanare** și nu au punct comun. Dreptele paralele d și d' se notează: $d \parallel d'$.

Observăm că în spațiu există perechi de drepte fără punct comun care nu sînt paralele. De exemplu, dacă A, B, C, D sînt puncte necoplanare, atunci dreptele AB și CD nu au punct comun și nici nu sînt paralele (fig. IV.3).

Oricare ar fi dreapta d și punctul A nesituat pe d, există o dreaptă d' paralelă cu d, care trece prin A. Într-adevăr, folosind cunoștințe din geometria absolută plană, construim în planul (Ad) o dreaptă d' care trece prin A și nu are punct comun cu d (se duce $AB \perp d$ și apoi în planul (Ad) o perpendiculară prin A pe AB) (fig. IV.4).

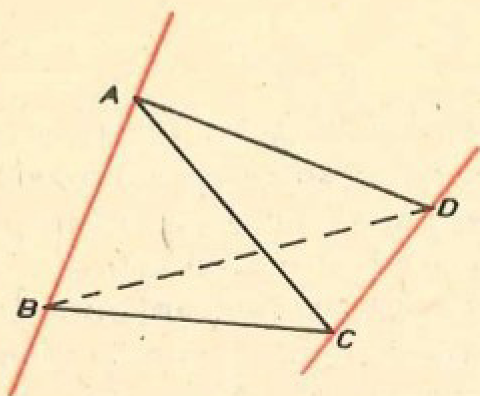


Fig. IV.3.

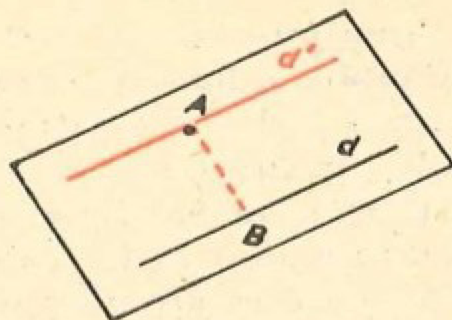


Fig. IV.4.

Nu putem însă demonstra cu ajutorul axiomelor enunțate pînă acum, că dreapta d' este singura paralelă prin A la d. De aceea admitem o ultimă axiomă, care împreună cu celelalte definește *geometria euclidiană în spațiu*:

Axioma paralelelor. Printr-un punct A exterior unei drepte d, trece cel mult o dreaptă paralelă cu d.

Rezultă: Printr-un punct exterior unei drepte trece o singură paralelă la dreapta dată.

Reținem că două drepte paralele d, d' sînt incluse într-un plan unic, care se notează cu (dd').

Exercițiu

9. Arătați că există o infinitate de plane, care conțin o dreaptă dată d.

§ 2. Construcții în spațiu

Să rezolvăm problema următoare:

Fiind date dreptele d, d' nesituate în același plan, și punctul $A \notin d \cup d'$, să se determine o dreaptă a, care să treacă prin punctul A și să intersecteze dreptele d și d'.

Presupunînd problema rezolvată și notînd cu P, Q punctele de intersecție ale dreptei a cu d, d' (fig. IV.5) se observă că punctul P aparține atît planului (Ad') cît și dreptei d. Așadar pentru a rezolva problema vom proceda astfel:

1) Determinăm planul (Ad').

2) Căutăm intersecția dreptei d cu planul (Ad'). Dacă punctul de intersecție nu există, problema nu are soluție; dacă există, îl notăm cu P.

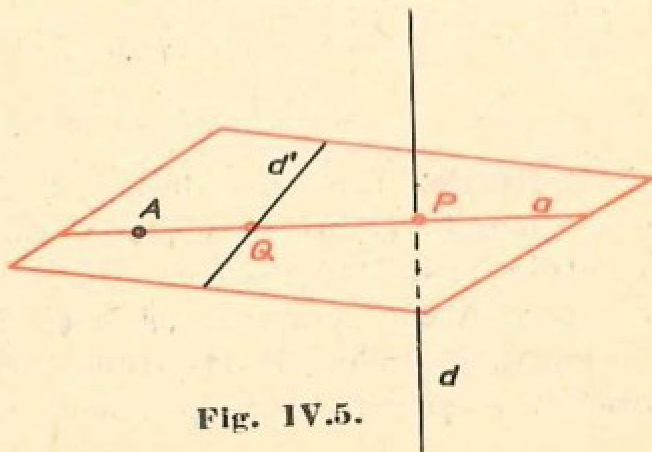


Fig. IV.5.

3) Unim punctele A şi P cu o dreaptă.

4) Căutăm intersecţia dreptelor coplanare AP şi d'. Dacă AP şi d' se taie, dreapta AP este soluţia problemei. Dacă nu se taie, nu există soluţie.

Aşadar, în funcţie de poziţia reciprocă a elementelor date (dreptele d, d' şi punctul A), problema noastră poate să aibă sau să nu aibă soluţie, şi anume: a) Dacă d taie planul (Ad') şi dacă punctul de intersecţie obţinut unit cu A, ne dă o dreaptă ce are un punct comun cu d', atunci această dreaptă este soluţia căutată. b) În orice alt caz problema nu are soluţie.

Astfel, răspunsul la problema propusă include un procedeu constînd din etapele 1) — 4) şi o discuţie. Vom vedea că multe probleme se rezolvă prin procedee asemănătoare, numite *construcţii în spaţiu*.

A construi în spaţiu o figură înseamnă a o determina.

Pentru puncte, drepte şi plane avem următoarele situaţii: Un punct este *determinat* dacă este dat ca atare sau dacă este intersecţia a două drepte date sau intersecţia unei drepte date cu un plan dat. O dreaptă se consideră *determinată* („construită") dacă este dată ca atare sau dacă se cunosc două puncte ale ei sau dacă rezultă din intersecţia a două plane date. Un plan este *determinat* („construit") dacă el este dat ca atare sau se cunosc trei puncte necoliniare ale lui sau două drepte concurente (sau paralele) date sau o dreaptă dată şi un punct nesituat pe ea.

În problemele de „construcţii" sînt date prin enunţ anumite figuri şi se cere determinarea (construirea) altor figuri, satisfăcînd condiţii bine precizate.

Exerciţii

1. Se dau planele α şi β şi $A, B \in \alpha$. Să se construiască un punct $M \in \alpha$, egal depărtat de A şi B, care să aparţină şi planului β.

2. Să se determine intersecţia a trei plane distincte α, β, γ.

Rezolvare. 1) Dacă $\alpha \cap \beta = \varnothing$, intersecţia cerută e mulţimea vidă. 2) Dacă $\alpha \cap \beta$ este o dreaptă d, intersecţia căutată este $d \cap \gamma$, care poate fi un punct, mulţimea vidă sau dreapta d.

3. Se dau: planul α, dreptele d_1, d_2 şi punctele $A, B \notin \alpha \cup d_1 \cup d_2$. Să se afle un punct $M \in \alpha$ astfel ca dreptele MA, MB să intersecteze respectiv pe d_1 şi d_2.

§ 3. Semispaţiu

Definiţie. Fie α un plan şi A, B două puncte nesituate în acest plan. Dacă segmentul $[AB]$ are un punct comun cu α se spune că planul α *separă* punctele A şi B (fig. IV.6) sau A şi B *sînt de o parte şi de alta a planului* α. În caz contrar se spune că A şi B *sînt de aceeaşi parte a planului* α.

Definiţie. Fie A un punct nesituat în planul α. Mulţimea formată din punctul A şi din toate punctele situate de aceeaşi parte a lui α ca şi A, se

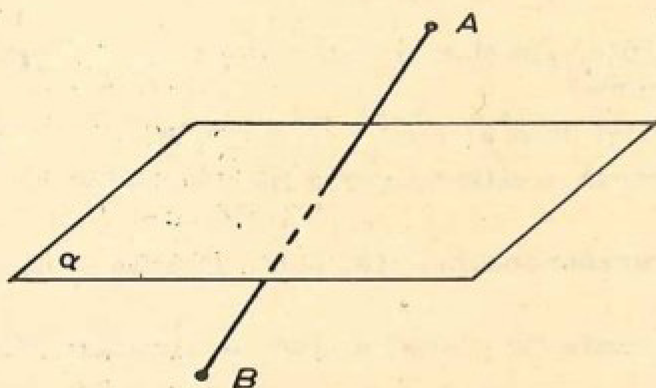


Fig. IV.6.

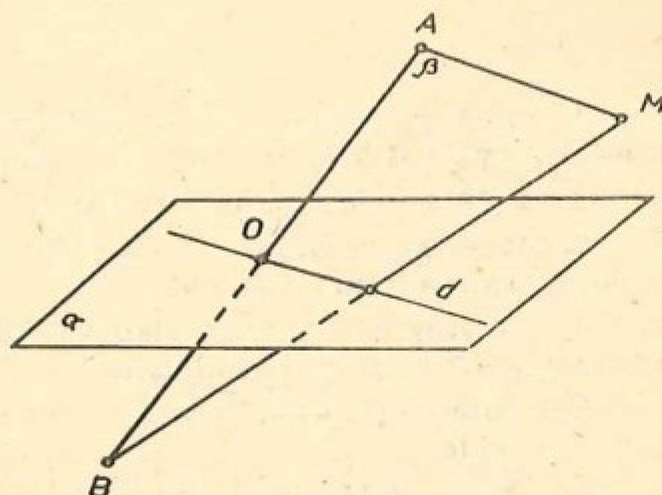


Fig. IV.7.

notează cu $(\alpha A$ şi se numeşte *semispaţiu (deschis)*. Spunem că α este *frontiera* lui $(\alpha A$ şi că $(\alpha A$ este *limitat* de α.

Teorema 1. (Teorema de separare a spaţiului.) Oricare ar fi planul α următoarele proprietăţi au loc:

1) Există exact două semispaţii σ_1 şi σ_2 limitate de planul α.

2) $\mathcal{S} - \alpha = \sigma_1 \cup \sigma_2$, $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$.

3) Dacă $P, Q \in \sigma_1$ sau $P, Q \in \sigma_2$, segmentul $[PQ]$ nu intersectează planul α. Dacă $P \in \sigma_1$ şi $R \in \sigma_2$, segmentul $[PR]$ şi planul α au un punct comun.

Demonstraţie. Alegem punctele $O \in \alpha$, $A \in \mathcal{S} - \alpha$ şi punctul B pe semidreapta opusă la $(OA$ (fig. IV.7). Notăm $\sigma_1 = (\alpha A$ şi $\sigma_2 = (\alpha B$. Vom arăta că un punct oarecare $M \in \mathcal{S} - \alpha$ se găseşte în σ_1 sau în σ_2, dar nu în amîndouă. Considerăm în acest scop un plan β care trece prin A, B şi M. Cum planele distincte α şi β au punctul comun O, ele se intersectează după o dreaptă d. Folosind în cazul planului proprietăţile de separare învăţate în clasa a IX-a rezultă că numai două situaţii sînt posibile: a) $[AM] \cap d = \emptyset$ şi $[BM] \cap d \neq \emptyset$ sau b) $[AM] \cap d \neq \emptyset$ şi $[BM] \cap d = \emptyset$. În primul caz $M \in \sigma_1$ şi $M \notin \sigma_2$, iar în cazul al doilea $M \notin \sigma_1$ şi $M \in \sigma_2$ şi proprietatea 2) din enunţ este demonstrată.

Arătăm acum că

1) $$A' \in (\alpha A \Rightarrow (\alpha A = (\alpha A'.$$

Luăm $P \in (\alpha A$ şi demonstrăm că $P \in (\alpha A'$. Presupunem contrariul, ceea ce înseamnă că există $Q \in [A'P] \cap \alpha$. Fie γ un plan care conţine punctele A, A' şi P. Deoarece punctul Q este comun planelor α şi γ, aceste plane se taie după o dreaptă a, care separă în γ punctele A' şi P. Rezultă că $[AA'] \cap a \neq \emptyset$ sau $[AP] \cap a \neq \emptyset$, deci $[AA'] \cap \alpha \neq \emptyset$ sau $[AP] \cap \cap \alpha \neq \emptyset$. Dar nici una dintre aceste situaţii nu este posibilă căci $A' \in (\alpha A$ şi $P \in (\alpha A$. Aşadar $(\alpha A \subset (\alpha A'$ şi analog $(\alpha A' \subset (\alpha A$.

Fie $(\alpha X$ un semispaţiu oarecare limitat de planul α. Dacă $X \in \sigma_1 = (\alpha A$, atunci din (1) rezultă că $(\alpha X = \sigma_1$, iar dacă $X \in \sigma_2$, atunci $(\alpha X = \sigma_2$ şi proprietatea 1) este demonstrată.

Fie $P, Q \in \sigma_1$. Atunci $(\alpha A = (\alpha P$ şi din $Q \in (\alpha P$ rezultă imediat că $[PQ] \cap \alpha = \emptyset$. Celelalte afirmaţii de la punctul 3) se arată în mod analog.

Semispaţiile σ_1 şi σ_2 se zic *opuse*.

Reuniunea unui semispaţiu deschis $(\alpha A$ cu frontiera sa, se numeşte *semispaţiu închis* şi se notează $[\alpha A$.

Exerciţii

◇ **1.** Dacă punctele A şi B aparţin semispaţiului deschis σ, atunci $[AB] \subset \sigma$. Proprietatea este valabilă şi pentru un semispaţiu închis?

2. Dacă punctul A nu este situat în planul α şi $B \in \alpha$, atunci $(BA \subset (\alpha A$.

3. Să se arate că intersecţia unei drepte d cu un semispaţiu este fie dreapta d, fie o semidreaptă, fie mulţimea vidă.

4*. Arătaţi că dacă un plan α şi frontiera unui semispaţiu σ sînt plane secante, atunci intersecţia $\sigma \cap \alpha$ este un semiplan.

5*. Intersecţia unui plan α cu un semispaţiu este fie planul α, fie un semiplan, fie mulţimea vidă.

6*. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare şi α un plan care nu trece prin nici unul din punctele date, dar trece printr-un punct al segmentului (AB). Dintre segmentele (AB), (AC), (AD), (BC), (BD), (CD) cîte pot fi intersectate de planul α?

7*. Fie d o dreaptă şi α, β două plane astfel ca $d \cap \beta = \varnothing$ şi $\alpha \cap \beta = \varnothing$. Să se arate că dacă $A \in d$ şi $B \in \alpha$, atunci $d \subset (\beta A$ şi $\alpha \subset (\beta B$.

8*. Fie $(\alpha A$ şi $(\beta B$ două semispaţii astfel ca $\alpha \neq \beta$ şi $(\alpha A \subset (\beta B$ sau $(\alpha A \cap (\beta B = \varnothing$. Să se arate că $\alpha \cap \beta = \varnothing$.

Definiţie. Fie α', β' două semiplane închise limitate de o aceeaşi dreaptă d (fig. IV.8). Mulţimea $\alpha' \cap \beta'$ va fi notată cu $\widehat{\alpha'\beta'}$ şi va fi numită *unghi diedru* definit de semiplanele α', β'. Semiplanele α', β' vor fi numite *feţele*, iar dreaptă d *muchia* unghiului diedru $\widehat{\alpha'\beta'}$.

$\widehat{\alpha'\beta'}$ se numeşte *unghi diedru nul*, dacă $\alpha' = \beta'$ şi *unghi diedru plat* dacă feţele lui sînt semiplane opuse. În cazul din urmă, muchia d trebuie să fie dată separat. Dacă un unghi diedru nu este nici nul nici plat, el se numeşte *propriu*.

Să notăm cu α şi β suporturile lui a' şi β' (planele ce conţin semiplanele α' şi β') şi fie $A \in \alpha' - d$, $B \in \beta' - d$. Prin *interiorul unghiului diedru* $\widehat{\alpha'\beta'}$ vom înţelege intersecţia semispaţiului deschis limitat de α, care conţine faţa β', cu semispaţiul deschis limitat de β, care conţine α':

$$\text{Int } \widehat{\alpha'\beta'} \overset{\text{def}}{=} (\alpha B \cap (\beta A.$$

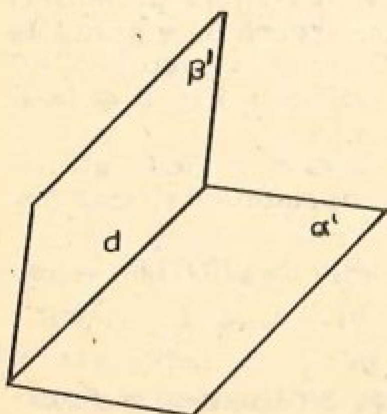


Fig. IV.8.

Definiţie. Fie $a = [OA$, $b = [OB$, $c = [OC$ semidrepte necoplanare, avînd origine comună O (fig. IV.9). Mulţimea

$$\widehat{abc} = a \cup b \cup c \cup \text{Int}\widehat{ab} \cup \text{Int}\widehat{bc} \cup \text{Int}\widehat{ca}$$

se numeşte *unghi triedru*. Punctul O este *vîrful*, semidreptele a, b, c sînt *muchiile*, iar $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$ sînt *un-*

ghiurile lui $\widehat{abc}$. Reuniunea unui unghi al lui $\widehat{abc}$ cu interiorul său se numeşte o *faţă* a lui $\widehat{abc}$. *Interiorul* lui $\widehat{abc}$ se defineşte astfel: Int $\widehat{abc} \overset{\text{def}}{=}$ $\overset{\text{def}}{=} (\alpha A \cap (\beta B \cap (\gamma C$, unde $\alpha = (OBC)$, $\beta =$ $= (OCA)$, $\gamma = (OAB)$.

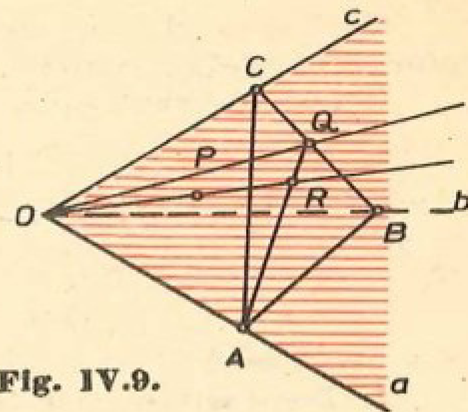


Fig. IV.9.

Exerciţii

9. Să se arate că intersecţia unui unghi diedru cu un plan α poate fi: un unghi, reuniunea a două drepte, o dreaptă, mulţimea vidă sau un semiplan închis, şi nu poate fi nici o mulţime de alt tip.

10*. Fie d muchia unui unghi diedru propriu $\widehat{\alpha'\beta'}$, $A \in \alpha' - d$, $B \in \beta' - d$ şi $P \in \text{Int } \widehat{\alpha'\beta'}$. Să se arate că: 1) $(Pd) \cap \text{Int } \widehat{\alpha'\beta'} = (dP$. 2) Dacă $M \in d$, Int $\widehat{AMB} =$ $= \text{Int } \widehat{\alpha'\beta'} \cap (ABM)$.

11*. Se consideră notaţiile exerciţiului 10. Să se arate: 1) punctele A şi B sînt de o parte şi de alta a planului (Pd); 2) Segmentul (AB) şi semiplanul $(dP$ au un punct comun.

12*. Dacă $\widehat{abc}$ este un unghi triedru, $P \in \text{Int } \widehat{abc}$ şi A, B, C sînt puncte pe muchiile a, b, c, diferite de O, atunci semidreapta $(OP$ şi Int ABC au un punct comun (fig. IV.9).

Indicaţie. Fie α', β', γ' semiplanele limitate de dreapta OA conţinînd respectiv punctele B, C, P. Deoarece $P \in \text{Int } \widehat{\alpha'\beta'}$, segmentul (BC) şi semiplanul γ' au un punct comun Q (exerc. 11). Rezultă că P, Q sînt de aceeaşi parte a lui OA; pe de altă parte, P, A se află de aceeaşi parte a lui OQ (deoarece $(AP) \cap (OBC) = \varnothing$), aşadar $P \in \text{Int } \widehat{AOQ}$ etc

§ 4. Mulţimi convexe

Definiţie. Se numeşte *mulţime convexă* orice mulţime de puncte $\mathcal{M}$ care are proprietatea:

(1) $$P, Q \in \mathcal{M},\ P \neq Q \Rightarrow (PQ) \subset \mathcal{M}.$$

Exerciţii

◇ **1.** Să se arate că orice intersecţie de mulţimi convexe este o mulţime convexă.

2. Să se arate că următoarele mulţimi sînt convexe: planele, semiplanele, orice semispaţiu deschis sau închis şi interiorul unui unghi diedru.

3. Poate fi un unghi diedru o mulţime convexă?

4. Care dintre următoarele mulţimi sînt convexe: a) un unghi triedru, b) interiorul său, c) reuniunea feţelor sale, d) reuniunea interiorului cu toate feţele?

5. Fie σ un semispaţiu deschis limitat de planul α şi $\mathcal{M}$ o mulţime convexă inclusă în planul α. Să se arate că mulţimea $\mathcal{M} \cup \sigma$ este convexă.

Definiție. Se numește *sferă* de centru O și rază $r(r > 0)$ mulțimea punctelor din spațiu pentru care $OM = r$ (fig. IV.10).

Ea se notează $\mathcal{S}(O, r)$. *Interiorul sferei* $\mathcal{S}(O, r)$ este mulțimea

$$\text{Int } \mathcal{S}(O, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{M \mid OM < r\}.$$

Mulțimea $\mathcal{S}(O, r) \cup \text{Int } \mathcal{S}(O, r)$ se numește *corp sferic* sau *bilă*.

Exerciții

◇ **6.** Să se arate că intersecția $\mathcal{S}(O, r)$ cu un plan ce trece prin O, este un cerc.
7. Demonstrați că $\text{Int } \mathcal{S}(O, r)$ este o mulțime convexă.

Vom defini în continuare o figură în spațiu care generalizează suprafața triunghiulară din plan. Dăm mai întîi o anumită caracterizare a suprafețelor triunghiulare, care apoi va servi ca model pentru generalizare.

Lemă. Un punct X aparține suprafeței triunghiulare $[ABC]$ dacă și numai dacă X aparține unui segment determinat de un vîrf și de un punct al laturii opuse; adică $X \in [ABC]$ dacă și numai dacă există $Y \in [BC]$ cu $X \in [AY]$ (fig. IV.11).

Într-adevăr, fie $X \in [ABC]$. Deosebim cazurile: 1° $X \in [AB]$ (resp. $X \in [AC]$), atunci se ia $Y = B$ (resp. $Y = C$); 2° $X \in [BC]$, se ia $Y = X$; 3° $X \in \text{Int } ABC$, atunci din teorema transversalei rezultă că semidreapta $(AX$ taie latura $[BC]$ într-un punct Y deoarece X și A sînt de aceeași parte a lui BC, rezultă $[AX] \cap BC = \varnothing$ și $X \in [AY]$. Reciproc, dacă $X \in [AY]$ și $Y \in [BC]$, atunci ținînd seama că $[ABC]$ este o mulțime convexă, din $A, Y \in [ABC]$ rezultă că $[AY] \subset [ABC]$ și astfel $X \in [ABC]$.

Lema poate fi formulată mai scurt: Suprafața triunghiulară $[ABC]$ coincide cu reuniunea segmentelor $[AY]$, unde $Y \in [BC]$. Luînd acum în locul segmentului $[BC]$ o suprafață triunghiulară $[BCD]$, nesituată în același plan cu A, se ajunge la noțiunea următoare:

Dacă A, B, C, D sînt patru puncte necoplanare, reuniunea segmentelor $[AM]$, unde $M \in [BCD]$ se numește *tetraedru* și se notează cu $[ABCD]$ (fig. IV.12). Punctele A, B, C, D se numesc *vîrfurile*, segmentele $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, $[BC]$, $[BD]$, $[CD]$ se numesc *muchiile*, iar suprafețele triunghiulare $[ABC]$, $[ABD]$, $[ACD]$, $[BCD]$ *fețele* tetraedrului $[ABCD]$. Reuniunea fețelor

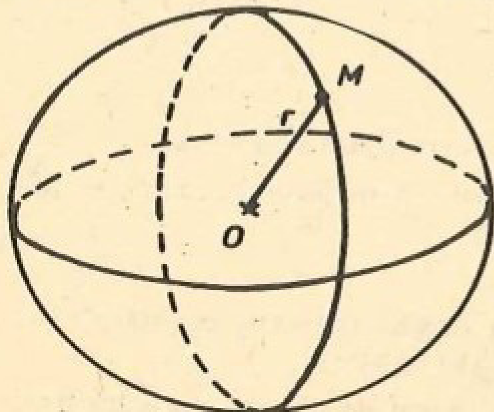


Fig. IV.10.

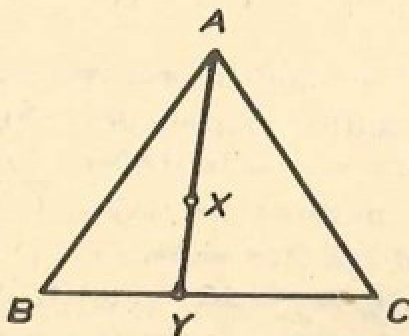


Fig. IV.11.

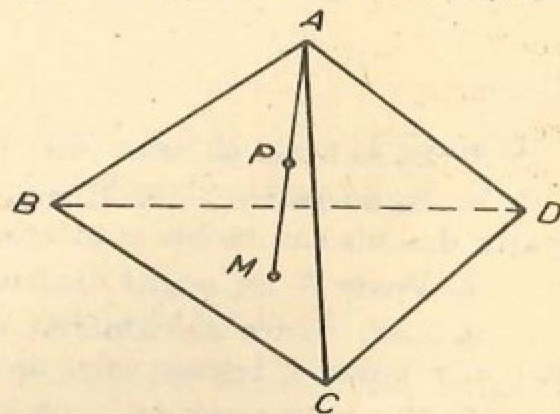


Fig. IV.12.

este numită *suprafață tetraedrală*, iar punctele lui $[ABCD]$ care nu aparțin nici unei fețe formează *interiorul tetraedrului*, care se notează cu Int $[ABCD]$.

În definiția tetraedrului vîrful A are un rol deosebit față de B, C, D. Teorema următoare ne arată că, totuși, mulțimea $[ABCD]$ rămîne neschimbată dacă vîrfurile sînt luate în altă ordine.

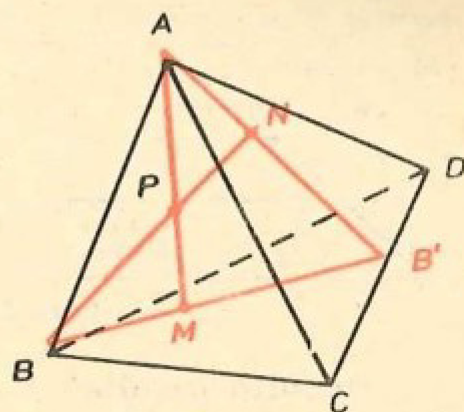


Fig. IV.13.

Teoremă. Oricare ar fi punctele necoliniare A, B, C, D avem $[ABCD] \equiv [BACD]$.

Demonstrație. Luăm $P \in [ABCD]$ și arătăm că $P \in [BACD]$. Știm că există $M \in [BCD]$ astfel ca $P \in [AM]$ (fig. IV.13). Din lemă rezultă că există $B' \in [CD]$ cu $M \in [BB']$. Aplicînd lema suprafeței triunghiulare $[ABB']$ deducem mai întîi că $P \in [ABB']$ și apoi că există $N \in [AB']$ cu $P \in [BN]$. Folosind lema și în cazul lui $[ACD]$, obținem că $N \in [ACD]$. Așadar $P \in [BN]$ și $N \in [ACD]$, ceea ce implică $P \in [BACD]$. Analog, $Q \in [BACD] \Rightarrow Q \in [ABCD]$ și teorema este demonstrată.

Exerciții

8. Să se arate că unind mijloacele muchiilor opuse ale unui tetraedru se obțin trei drepte concurente.

Indicație. Se formează trei paralelograme cu cîte o diagonală comună.

9*. Să se arate că dreptele care unesc vîrfurile unui tetraedru cu centrele de greutate ale fețelor opuse sînt concurente în același punct ca și cele trei drepte din exercițiul 8.

10*. Fie $[ABCD]$ un tetraedru. Se consideră unghiurile triedre care au ca muchii $[AB$, $[AC$, $[AD$; $[BA$, $[BC$, $[BD$; $[CA$, $[CB$, $[CD$; $[DA$, $[DB$, $[DC$. Să se arate că intersecția interioarelor acestor patru unghiuri triedre coincide cu interiorul tetraedrului $[ABCD]$.

11*. Să se arate că oricare ar fi punctul M în interiorul tetraedrului $[ABCD]$, există $P \in (AB)$ și $Q \in (CD)$ astfel încît $M \in (PQ)$.

12*. Interiorul tetraedrului $[ABCD]$ coincide cu reuniunea segmentelor (PQ) cu $P \in (AB)$ și $Q \in (CD)$, iar tetraedrul $[ABCD]$ este egal cu reuniunea segmentelor închise $[PQ]$, cînd $P \in [AB]$ și $Q \in [CD]$.

13*. Demonstrați că un tetraedru este o mulțime convexă.

14*. Fie $\mathcal{M}_1$ și $\mathcal{M}_2$ mulțimi convexe. Să se arate că reunind segmentele $[PQ]$, pentru care $P \in \mathcal{M}_1$ și $Q \in \mathcal{M}_2$, se obține o mulțime convexă.

15*. Să se arate că interiorul unui tetraedru coincide cu intersecția semispațiilor deschise determinate de planele fețelor și vîrful opus respectiv. Caracterizați tetraedrul ca o intersecție de semispații.

§ 5. Paralelism în spațiu

Definiție. O dreaptă d și un plan α se numesc *paralele* dacă nu au nici un punct comun, ceea ce se notează $d \parallel \alpha$ sau $\alpha \parallel d$.

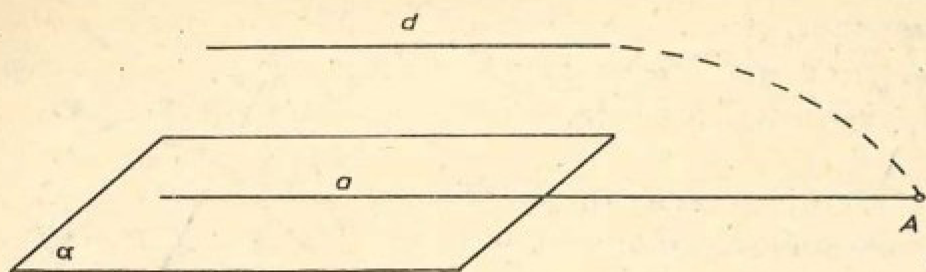


Fig. IV.14.

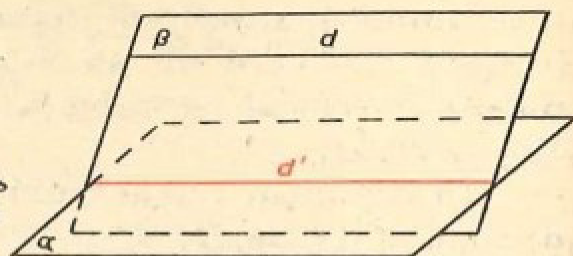


Fig. IV.15.

Rezultă imediat că o dreaptă d și un plan α ce nu trece prin d sînt fie paralele, fie se intersectează într-un singur punct.

Existența unei drepte paralele cu un plan rezultă din proprietatea următoare.

Proprietatea 1. Dacă o dreaptă d este paralelă cu o dreaptă a inclusă într-un plan α, atunci d este paralelă cu planul α sau este conținută în acest plan.

Demonstrație. Putem presupune că $d \not\subset \alpha$ (fig. IV.14). Atunci planele α și (da) sînt distincte, deci $\alpha \cap (da) = a$. Dacă d ar avea un punct comun A cu planul α din $A \in \alpha$ și $A \in (da)$ ar rezulta că $A \in \alpha \cap (da) = a$, deci dreptele a și d ar avea un punct comun, ceea ce este imposibil.

Proprietatea 2. Dacă o dreaptă d este paralelă cu un plan α, iar un plan β trece prin d și intersectează planul α, atunci $\alpha \cap \beta$ este o dreaptă paralelă cu d (fig. IV.15).

Demonstrație. Știm că $\alpha \cap \beta$ este o dreaptă d'. Dreptele d și d' sînt coplanare și nu au nici un punct comun (căci un punct comun al lor ar aparține și lui α, deci am avea $d \cap \alpha = \varnothing$). Rezultă că $d \parallel d'$.

Proprietatea 3. Fie d o dreaptă paralelă cu un plan α și $A \in \alpha$. Atunci paralela la dreapta d, dusă prin A, este continută în planul α.

Demonstrație. Fie a paralela prin A la d și $b = \alpha \cap (Ad)$ (fig. IV.16). Conform proprietății 2, $b \parallel d$. Din axioma paralelelor rezultă $a = b$, deci $a \subset \alpha$.

Teorema 1. Dacă două drepte distincte d' și d'' sînt paralele cu o a treia dreaptă d, atunci dreptele d' și d'' sînt paralele între ele (fig. IV.17).

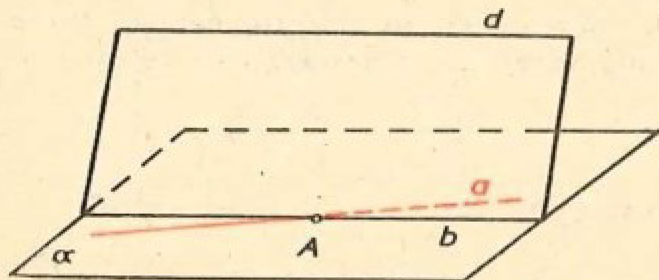


Fig. IV.16.

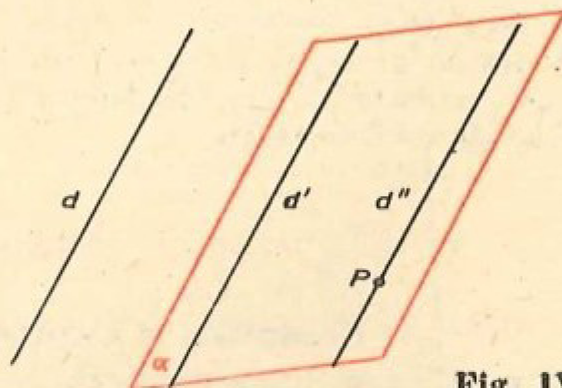


Fig. IV.17.

Demonstrație. Dacă d' și d'' ar avea un punct comun A, prin acest punct ar trece două drepte paralele la d, în contradicție cu axioma paralelelor. Așadar $d' \cap d'' = \varnothing$. Trebuie să demonstrăm că d' și d'' sînt conținute într-un același plan. Fie $P \in d''$ și $\alpha = (Pd')$. Cum $d \parallel d'$, proprietatea 1 ne arată că $d \subset \alpha$ sau $d \parallel \alpha$. Din $d'' \parallel d$ deducem că $d'' \subset \alpha$ (ceea ce în cazul $d \subset \alpha$ rezultă imediat, iar în cazul $d \parallel \alpha$ în virtutea proprietății 3). Așadar d' și d'' sînt conținute în planul α.

Exerciții

1. Fie d, d' două drepte paralele. Dacă dreapta d este paralelă cu un plan α, să se arate că $d' \parallel \alpha$ sau $d' \subset \alpha$.

Indicație. Conform proprietății 3 există o dreaptă $a \subset \alpha$, paralelă cu d. Folosiți teorema 1 și proprietatea 1.

2. Se consideră o dreaptă d, paralelă cu planele α și β, care se intersectează după dreapta a. Arătați că $d \parallel a$.

3. Printr-o dreaptă dată d duceți un plan paralel cu o altă dreaptă d'. Discutați numărul soluțiilor.

4. Să se determine reuniunea dreptelor care intersectează o dreaptă dată d și sînt paralele cu o altă dreaptă dată d' (d nu este paralelă cu d').

5. Să se construiască o dreaptă care întîlnește două drepte date și este paralelă cu o a treia dreaptă dată. Discuție.

6. Dacă un plan α intersectează planele secante β, γ după drepte paralele, atunci α este paralel cu dreapta $\beta \cap \gamma$.

7. Un plan variabil taie două drepte paralele în punctele M și N. Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului $[MN]$.

8. Se dau două drepte. Duceți printr-un punct dat un plan paralel cu ambele drepte. Discuție.

9. Să se construiască o dreaptă care trece printr-un punct dat, este paralelă cu un plan dat și intersectează o dreaptă dată. Discuție.

10. Se dau dreptele d_1, d_2, d_3, astfel ca $d_1 \parallel d_2$, d_2 nu este paralelă cu d_3 și $d_3 \not\subset (d_1, d_2)$; se ia pe d_3 un punct variabil M. Să se arate că dreapta de intersecție a planelor (d_1M) și (d_2M) descrie un plan, cînd M variază pe d_3.

11*. Să se arate că dacă triunghiurile ABC și $A'B'C'$, situate în plane diferite, au $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$ și $BC \parallel B'C'$, atunci dreptele AA', BB', CC' sînt concurente sau paralele.

Definiție. Două plane α, β se numesc *paralele* și se notează $\alpha \parallel \beta$, dacă ele nu au nici un punct comun.

Exerciții

◇ **12.** Să se arate că dacă două plane sînt paralele, orice dreaptă conținută în unul din ele este paralelă cu celălalt plan (fig. IV.18).

◇ **13.** Dacă un plan intersectează două plane paralele, intersecțiile sînt drepte paralele (fig. IV.19).

Indicație. Intersecțiile sînt coplanare și nu pot avea punct comun.

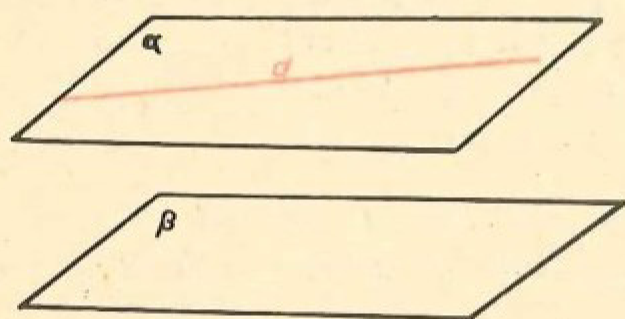


Fig. IV.18.

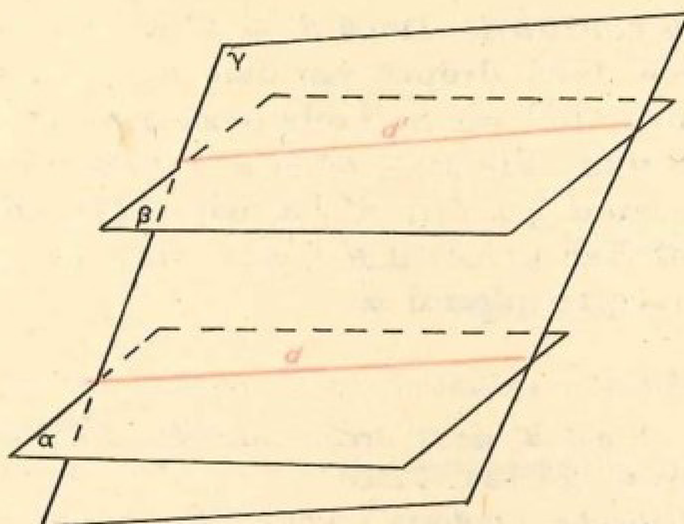


Fig. IV.19.

Teorema 2. Două plane distincte, paralele cu un al treilea plan sînt paralele între ele.

Demonstrație. Presupunînd că teorema este falsă, există planele distincte α' și α'', paralele cu un plan α, și care se intersectează după o dreaptă d. Luăm punctele $B \in \alpha$, $A \in d$ și un plan β, care trece prin A și B, dar nu trece prin d (fig. IV.20) și notăm $d_1 = \alpha \cap \beta$, $d' = \alpha' \cap \beta$, $d'' = \alpha'' \cap \beta$. Conform exercițiului 13 : $d' \parallel d_1$ și $d'' \parallel d_1$.

Avem $d' \neq d''$, căci altfel α' și α'' ar avea în comun dreptele d și d' în contradicție cu $\alpha' \neq \alpha''$. Deci prin punctul A trec două paralele la d_1, ceea ce este absurd. Rezultă că teorema este adevărată.

Existența planelor paralele era asigurată de teorema următoare.

Teorema 3. Fiind date un plan α și un punct $A \notin \alpha$, există un singur plan care trece prin A și este paralel cu α.

Demonstrație. Ducem prin A dreptele distincte a și b, paralele cu planul α (fig. IV.21). Planul $\beta = (ab)$ este paralel cu α deoarece în caz contrar dreapta $\alpha \cap \beta$ ar intersecta cel puțin una din dreptele a și b, în contradicție cu $a \parallel \alpha$, $b \parallel \alpha$. Așadar am obținut un plan β, care trece prin A și este paralel cu α. Dacă ar exista încă un astfel de plan γ, din teorema 2 ar rezulta că $\beta \parallel \gamma$, ceea ce este absurd (căci $A \in \beta$, $A \in \gamma$). Teorema este demonstrată.

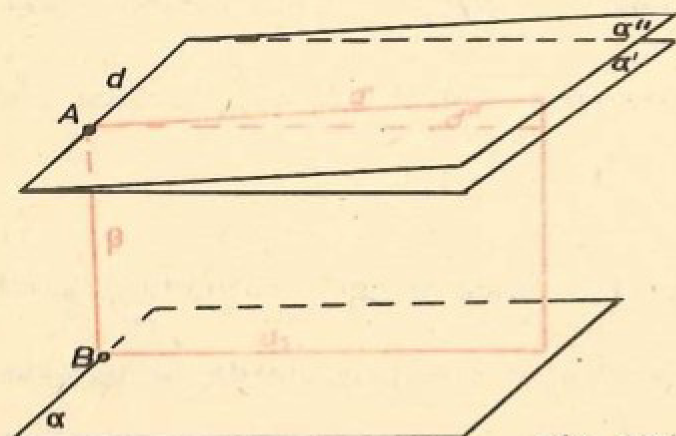


Fig. IV.20.

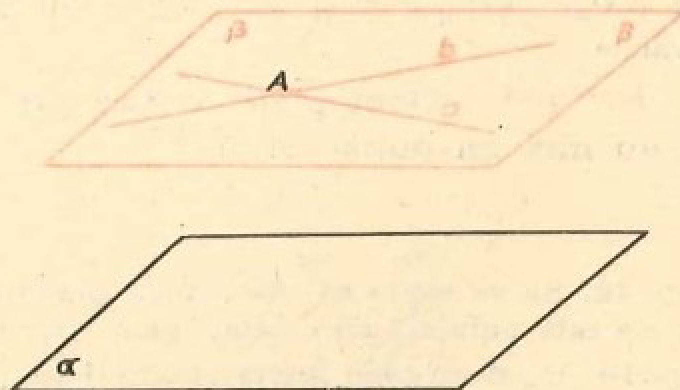


Fig. IV.21.

Din demonstrație, rezultă și construcția unicului plan β, care trece prin punctul dat A și este paralel cu planul dat α. Ducînd prin A două drepte distincte a și b, paralele cu α, se obține planul $(ab) = \beta$.

Dreapta a poate fi oricare dintre paralelele prin A la α, deci toate aceste paralele sînt incluse în β. Reciproc, orice dreaptă inclusă în β este paralelă cu α (vezi exerc. 1). Rezultă că *reuniunea dreptelor paralele cu un plan α, duse printr-un punct A, este un plan paralel cu α* (fig. IV.22).

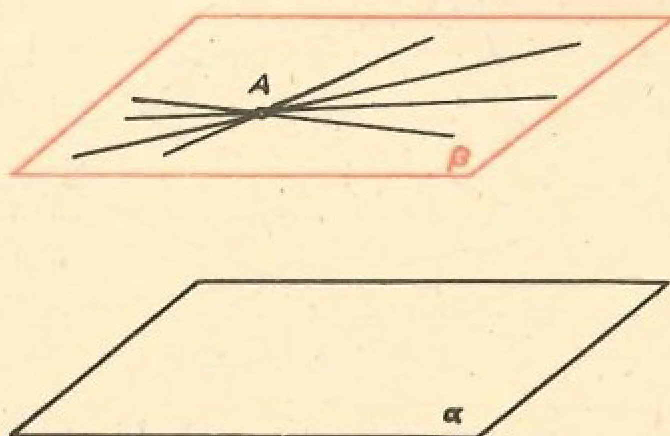


Fig. IV.22.

Exerciții

14. Arătați că o dreaptă, care taie unul din două plane paralele într-un singur punct, taie și pe celălalt.

15. Arătați că dacă două plane sînt paralele, atunci un plan care intersectează pe unul din ele după o dreaptă, taie și pe celălalt.

16. Dacă o dreaptă este paralelă cu unul din două plane paralele, atunci ea este sau paralelă și cu al doilea plan sau este conținută în acesta.

17. Prin dreptele paralele d și d' se duc respectiv planele α și α', distincte de (dd'). Să se arate că $\alpha \parallel \alpha'$ sau $(\alpha \cap \alpha') \parallel d$.

Teorema 4. Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sînt congruente sau suplementare.

Demonstrație. Fie $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'O'B'}$ cele două unghiuri ($OA \parallel O'A'$ și $OB \parallel O'B'$) despre care putem presupune că sînt proprii și nu sînt coplanare. Fie $d = OO'$. Considerăm cazul: $A' \in (dA$, $B' \in (dB$ (celelalte cazuri se reduc ușor la acest caz). Putem admite că $(OA) \equiv (O'A')$, $(OB) \equiv (O'B')$ și $B \notin AA'$ (fig. IV.23). Atunci $OO'A'A$ și $OO'B'B$ sînt paralelograme, deci $(AA') \equiv (OO') \equiv (BB')$, de unde rezultă că și $AA'B'B$ este un paralelogram și $(AB) \equiv (A'B')$. Teorema rezultă acum din congruența triunghiurilor OAB și $O'A'B'$.

Teorema 4 permite să dăm următoarea

Definiție. *Prin unghiul a două drepte d și d'* vom înțelege oricare din unghiurile $\widehat{MON}$, unde O este un punct oarecare al spațiului, $OM \parallel d$, $ON \parallel d'$ și $m(\widehat{MON}) \in [0°, 90°]$ (fig. IV.24).

Unghiul a două drepte date nu este determinat în mod unic, dar toate aceste unghiuri sînt congruente între ele (în virtutea teoremei 4). Așadar *măsura unghiului a două drepte are un sens precis*.

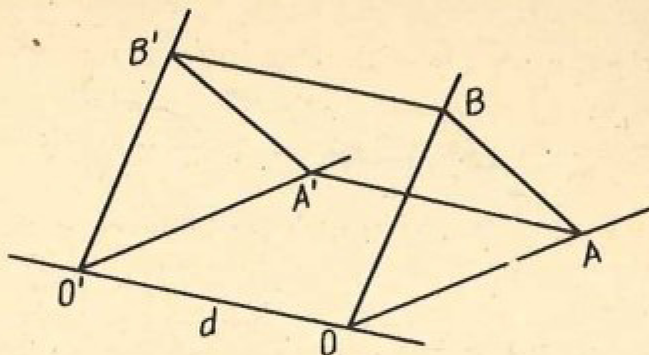


Fig. IV.23.

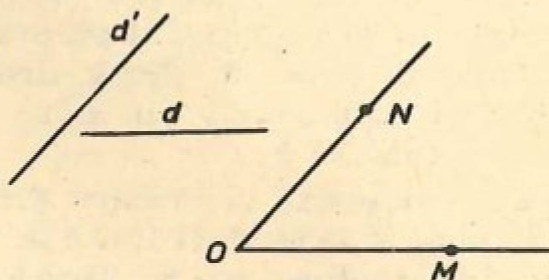


Fig. IV.24.

Din teorema 4 rezultă de asemenea că măsura unghiului a două drepte d și d' rămîne aceeași dacă înlocuim dreptele d și d' cu oricare drepte respectiv paralele cu d și d'. Acest fapt justifică definiția următoare:

Definiție. Prin *direcția unei drepte* d, notată cu dir d, înțelegem mulțimea formată din d și toate dreptele paralele cu d (este o mulțime de mulțimi). Prin *unghiul a două direcții* înțelegem unghiul format de cîte o dreaptă din cele două direcții (care nu depinde de alegerea dreptelor respective).

Să însemnăm cu $\mathcal{D}$ mulțimea tuturor dreptelor și să considerăm pe $\mathcal{D}$ relația „$d_1 \parallel d_2$ sau $d_1 = d_2$", care se va nota cu $d_1 \sim d_2$. Avem evident $d_1 \sim d_1$ și $d_1 \sim d_2 \Leftrightarrow d_2 \sim d_1$, deci relația este reflexivă și simetrică. Dar ea este și tranzitivă: $d_1 \sim d_2, d_2 \sim d_3 \Rightarrow d_1 \sim d_3$. Într-adevăr, dacă dintre cele trei drepte două coincid, implicația este evidentă, iar dacă d_1, d_2, d_3 sînt distincte atunci $d_1 \parallel d_2$, $d_2 \parallel d_3$, $d_1 \neq d_3 \Rightarrow d_1 \parallel d_3$ în virtutea teoremei 1.

Rezultă că am definit o relație de echivalență. Clasa de echivalență determinată de o dreaptă d este constituită din dreptele d' cu $d' \sim d$, adică din d și toate dreptele paralele cu d, deci coincide cu dir d. Așadar, *clasele de echivalență ale relației „paralel sau egal" coincid cu direcțiile.*

De aici rezultă că *două direcții ori sînt disjuncte ori coincid.* Să arătăm acest rezultat fără referire la teorema generală a claselor de echivalență (de fapt, vom repeta demonstrația generală în cazul nostru). În acest scop presupunem că dir d_1 și dir d_2 au o dreaptă comună a și arătăm că dir $d_1 =$ dir d_2. Fie $d \in$ dir d_1. Atunci $d \sim d_1$; dar din $a \sim d_1$, $a \sim d_2$ (căci $a \in$ dir d_1, $a \in$ dir d_2), rezultă că $d_1 \sim d_2$. Acum $d \sim d_1$, $d_1 \sim d_2$ implică $d \sim d_2$. Așadar $d \in$ dir $d_1 \Rightarrow d \in$ dir d_2 și analog $d' \in$ dir $d_2 \Rightarrow d' \in$ dir d_1.

Exerciții

18. Se dau un plan α, un punct $A \in \alpha$ și o dreaptă $d \subset \alpha$. a) Să se construiască o dreaptă d' astfel încît: $A \in d'$ și $d' \in$ dir d. b) Să se construiască o dreaptă prin A, inclusă în α, care să formeze cu d un unghi de măsură dată a. Cîte soluții există?

19*. Arătați că relația „$\alpha \parallel \beta$ sau $\alpha = \beta$" definită pe mulțimea planelor este o relație de echivalență. Determinați clasele de echivalență.

20*. Se consideră pe mulțimea tuturor dreptelor și a planelor relația „$x \parallel y$ sau $x = y$", unde x și y sînt drepte sau plane. Am definit o relație de echivalență?

21. Arătați că două segmente paralele cuprinse între plane paralele, sînt congruente.

22. Să se arate că prin două drepte, care nu sînt conținute într-un același plan, se pot duce două plane paralele în mod unic. Să se studieze și situația cînd cele două drepte sînt coplanare.

23. Fie α și β două plane paralele, A, $B \in \alpha$, iar CD o dreaptă paralelă cu α și β. Dreptele CA, CB, DB, DA taie planul β respectiv în M, N, P, Q. Să se arate că aceste puncte sînt vîrfurile unui paralelogram.

24. Aflați locul geometric al mijloacelor segmentelor care au extremitățile în două plane paralele.

Exerciții recapitulative

1. Prin două drepte date să se ducă cîte un plan, astfel ca dreapta lor de intersecție să fie conținută într-un plan dat.

2. Fie a, b, c trei drepte cu un punct comun, iar P un punct nesituat pe ele. Să se arate că planele (Pa), (Pb), (Pc) conțin o dreaptă comună.

3. Fie A, B, C, D puncte necoplanare, iar α un plan care separă punctele A și B; A și C; C și D. Arătați că $\alpha \cap (BD) \neq \varnothing$ și $\alpha \cap (AD) = \varnothing$.

4. Pe muchiile a, b, c ale unui unghi triedru de vîrf O se iau punctele A, B, C; fie apoi $D \in (BC)$ și $E \in (AD)$. Arătați că $(OE \subset \text{Int}\ \widehat{abc}$.

5. Arătați că următoarele mulțimi sînt convexe: interiorul unui unghi triedru, un tetraedru fără o muchie (fără o față).

6. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare și E, F, G, H mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. a) Să se arate că $EF \parallel (ACD)$ și punctele E, F, G, H sînt coplanare; b) Dacă $\{M\} = EG \cap FH$, să se afle locul geometric al punctului M cînd A, B, C sînt puncte fixe, în timp ce punctul D descrie o dreaptă dată d (sau un plan dat α).

7.* Pe dreptele d, d' se iau punctele distincte A, B, C respectiv A', B', C'. Să se arate: putem duce prin dreptele AA', BB', CC' trei plane paralele între ele dacă și numai dacă

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

8.* Fie M, M' cîte un punct mobil pe dreptele necoplanare d, d'. Să se afle locul geometric al punctului P care împarte segmentul (MM') într-un raport dat.

9.* Să se construiască o dreaptă care să întîlnească trei drepte date respectiv în M, N, P și pentru care MN / NP să fie un raport dat.

10. Se dau dreptele d, d' care taie un plan dat α în punctele A și A'. Să se construiască punctele M, M' situate respectiv pe d, d', astfel încît $MM' \parallel \alpha$ și segmentul $[MM']$ să aibă o lungime dată l. Discuție.

Indicație. Duceți prin A' o dreaptă $d^* \parallel d$. Două plane paralele cu α, unul fix, altul mobil, vor intersecta d, d', d^*, în B, B', B^* respectiv în M, M', M^*. Se observă că $\widehat{MM^*M'} \equiv \widehat{BB^*B'}$. Problema revine la construirea unui triunghi cu două laturi date și un unghi dat.

11. a) Să se afle locul geometric al vîrfului P al triunghiului MNP, dacă laturile acestuia rămîn paralele cu trei drepte fixe, vîrful M descrie o dreaptă dată d, iar vîrful N aparţine unui plan dat α. b) Aceeaşi problemă, cu deosebirea că M descrie un plan dat β.

12. Pe muchiile $[OA$, $[OB$, $[OC$ ale unui unghi triedru se consideră respectiv punctele M, N, P astfel ca $OM = \lambda OA$, $ON = \lambda OB$, $OP = \lambda OC$, unde λ este un număr pozitiv variabil. Să se afle locul geometric al centrului de greutate al triunghiului MNP.

13.* $ABCD$ şi $A_1B_1C_1D_1$ fiind două paralelograme oarecare în spaţiu, se iau punctele A_2, B_2, C_2, D_2 care împart segmentele $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$, $[DD_1]$ în acelaşi raport. Să se arate că $A_2B_2C_2D_2$ este tot un paralelogram.

Indicaţie. Luăm pe (D_1A), (C_1B) punctele M, N astfel încît

$$\frac{D_1M}{MA} = \frac{C_1N}{NB} = \frac{A_1A_2}{A_2A};$$

A_2MNB_2 şi D_2MNC_2 sînt paralelograme.

Capitolul V

Perpendicularitate în spațiu

§ 1. Drepte perpendiculare
Dreaptă perpendiculară pe un plan

Am definit unghiul a două drepte oarecare d și d' (nu neapărat situate într-un același plan). Dacă acesta este un unghi drept, dreptele d și d' se numesc *perpendiculare* și se notează $d \perp d'$. Așadar, dacă $m(\widehat{AOB}) = 90°$, orice paralelă la OA este perpendiculară pe orice paralelă la OB (fig. V.1).

Fie d o dreaptă și $A \in d$. Putem construi drepte prin A perpendiculare pe d, considerînd planele conținînd d și trasînd în ele prin punctul A cîte o perpendiculară pe d. Deoarece prin d trec o infinitate de plane, există o infinitate de perpendiculare prin A pe d (fig. V.2).

Teorema 1. Dacă o dreaptă d este perpendiculară pe două drepte concurente conținute într-un plan α, atunci dreapta d este perpendiculară pe orice dreaptă situată în planul α.

Demonstrație. Fie $d \perp a$, $d \perp b$, unde a și b sînt drepte concurente, $a, b \subset \alpha$ și c o dreaptă inclusă în α. Trebuie să arătăm că $d \perp c$. Putem admite fără a restrînge generalitatea că cele patru drepte trec printr-un punct comun O (fig. V.3). Alegem punctele $A \in a$, $B \in b$, M, $M' \in d$ astfel încît ele să fie

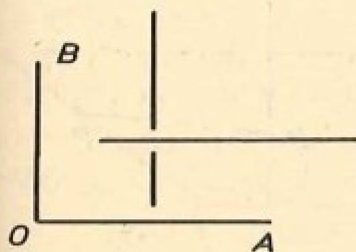


Fig. V.1.

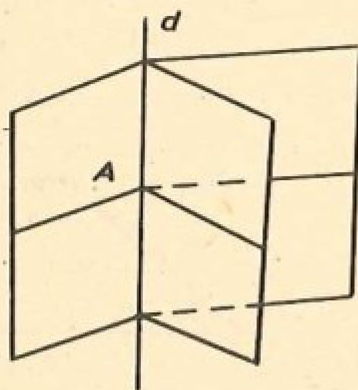


Fig. V.2

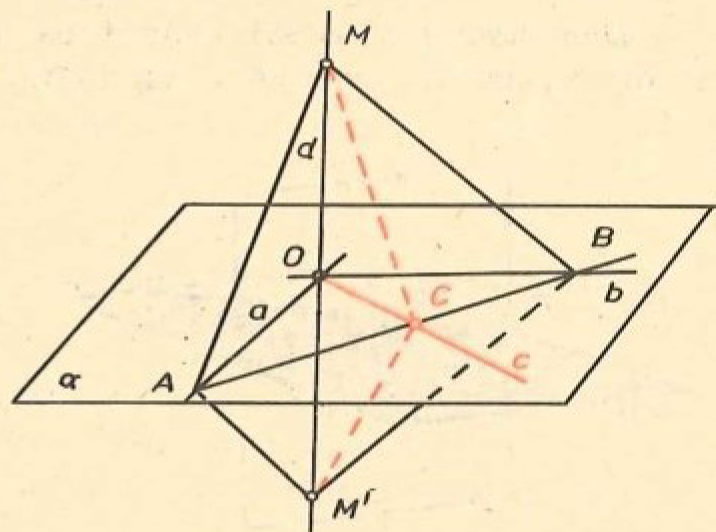


Fig. V.3.

distincte de O, $(OM) \equiv (OM')$ şi AB să intersecteze dreapta c într-un punct C. Din $\triangle OAM \equiv \triangle OAM'$ şi $\triangle OBM \equiv \triangle OBM'$ rezultă $(AM) \equiv (AM')$ şi $(BM) \equiv (BM')$, deci $\triangle ABM \equiv \triangle ABM'$ şi avem $\widehat{BAM} \equiv \widehat{BAM'}$. Dar atunci $\triangle CAM \equiv \triangle CAM'$ şi se deduce că triunghiul CMM' este isoscel; cum $[CO]$ este mediană, este şi înălţime. Deci $d \perp c$.

Teorema 1 ne îndreptăţeşte să dăm următoarea

Definiţie. O dreaptă d se numeşte *perpendiculară pe un plan* α dacă ea este perpendiculară pe orice dreaptă inclusă în planul α. În acest caz se scrie $d \perp \alpha$ sau $\alpha \perp d$ şi se mai spune că α este perpendicular pe d.

Cu acest termen teorema 1 se enunţă astfel: *Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte concurente conţinute într-un plan* α, *atunci ea este perpendiculară pe planul* α.

Din demonstraţia teoremei 1 rezultă imediat şi un mod de a construi un plan perpendicular pe o dreaptă d, printr-un punct $P \in d$, deci rezultă şi *existenţa unui astfel de plan:* ducînd prin P dreptele distincte $a, b \perp d$, se obţine un plan (ab) perpendicular pe d.

Să considerăm acum dreptele prin P. Cele conţinute în (ab) sînt perpendiculare pe d. Reciproc, dacă $d' \ni P$ şi $d' \perp d$, atunci $d' \subset (a\ b)$. Într-adevăr, planele (ab) şi (dd') se taie după o dreaptă c (fig. V.4). Cum $c \subset (ab)$, din teorema 1 rezultă că $c \perp d$. Dar în planul (dd') putem duce prin P doar o singură perpendiculară pe d, deci $d' = c$ şi $d' \subset (a\ b)$. Am obţinut următorul rezultat: *orice plan prin* P, *perpendicular pe* d, *coincide cu reuniunea dreptelor perpendiculare pe* d, *care trec prin* P. Cum această reuniune este determinată în mod unic cînd se dău P şi d, rezultă că *există un singur plan trecînd prin* P *şi perpendicular pe* d. Acest rezultat rămîne valabil şi în cazul cînd $P \notin d$:

Teorema 2. Fiind date o dreaptă d şi un punct P, există un singur plan trecînd prin P şi perpendicular pe d.

Demonstraţie. a) Am văzut că teorema este adevărată în cazul $P \in d$. Să presupunem acum că $P \notin d$ (fig. V.5). Ducem în planul (Pd) perpendicu-

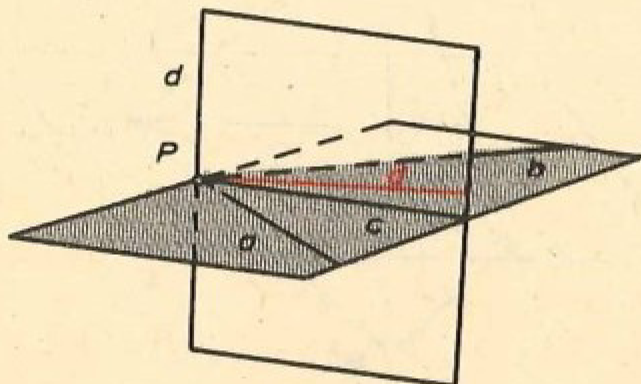


Fig. V.4.

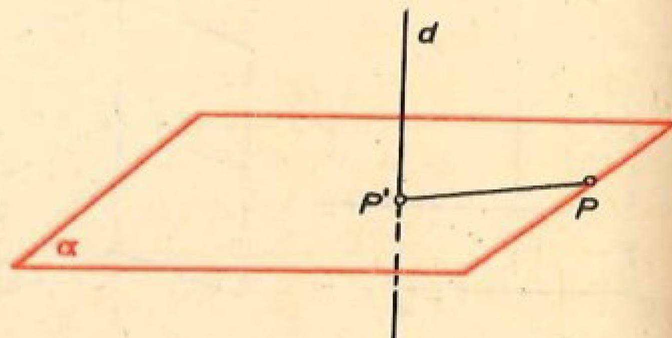


Fig. V.5.

lara PP' pe $d(P' \in d)$ și notăm cu α (unicul, plan prin P' perpendicular pe d. Deoarece $P'P \perp d$, avem $P'P \subset \alpha$, deci $P \in \alpha$ și existența este demonstrată. Pentru unicitate să observăm că dacă un plan β conține punctul P și $\beta \perp d$, atunci $PP' \subset \beta$, deci $P' \in \beta$. Din $d \perp \beta$ și $P' \in \beta$ rezultă $\beta = \alpha$ și unicitatea este demonstrată.

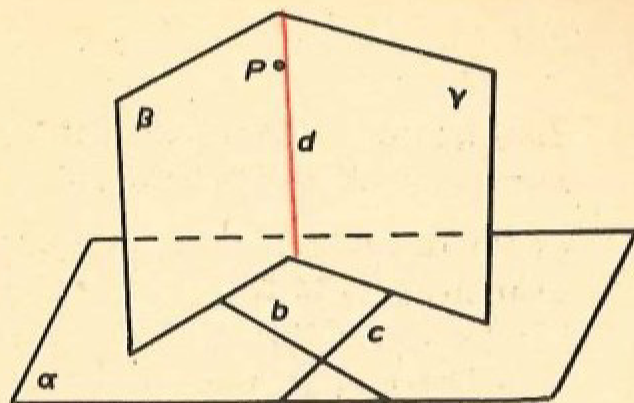


Fig. V.6.

T e o r e m a 3. Oricare ar fi planul α și punctul P, există o singură dreaptă care trece prin P și este perpendiculară pe α.

Demonstrație. În planul α alegem dreptele secante b și c, și ducem prin P planele β, γ respectiv perpendiculare pe b, c, care se taie după o dreaptă d (fig. V.6). Avem $b \perp d$, $c \perp d$, deci $d \perp \alpha$ (în virtutea teoremei 1) și deoarece $P \in d$, existența este demonstrată. Dacă d' este o dreaptă prin P și $d' \perp \alpha$, atunci $d' \perp b$, $d' \perp c$, de unde deducem că $d' \subset \beta$ și $d' \subset \gamma$. Dar atunci $d' \subset \beta \cap \gamma = d$, deci $d' = d$ și unicitatea este demonstrată. (Această demonstrație este valabilă pentru ambele cazuri: $P \notin \alpha$ și $P \in \alpha$.)

Exerciții

1. Să se construiască o dreaptă care să treacă printr-un punct dat A și să fie perpendiculară pe două drepte date d și d'.

2. Să se arate că există trei drepte cu un punct comun, perpendiculare două cîte două.

3. Fie a, b, c, d patru drepte cu un punct comun, d fiind perpendiculară pe a, b, c. Să se arate că dreptele a, b, c sînt coplanare.

4. Arătați că nu există patru drepte cu un punct comun, perpendiculare două cîte două.

5. Fie $d \perp \alpha$ și $d' \parallel d$. Arătați că $d' \perp \alpha$.

6. Să se arate că două drepte distincte, perpendiculare pe un plan α, sînt paralele.

7. Dacă $d \perp \alpha$ și $d' \parallel \alpha$, atunci $d' \perp d$.

8. Arătați că două plane perpendiculare pe o dreaptă sînt paralele între ele.

◇ **9.** Să se arate că locul geometric al punctelor egal depărtate de două puncte distincte A și B este un plan perpendicular pe AB, care trece prin mijlocul O al segmentului $[AB]$, (numit *planul mediator* al lui $[AB]$).

Indicație. Fie α planul prin O perpendicular pe AB. Dacă $AM = BM$, atunci $MO \perp AB$, deci $M \in \alpha$. Dacă $M \in \alpha$, atunci $MO \perp AB$, deci $AM = BM$.

10. Să se afle locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de vîrfurile unui triunghi ABC.

11. Arătați locul geometric al punctelor egal depărtate de toate punctele unui cerc.

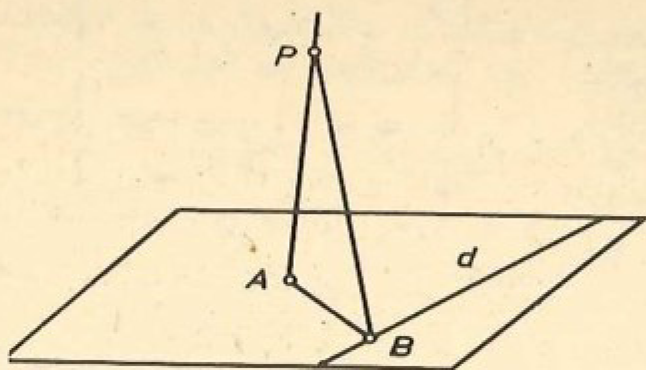


Fig. V.7.

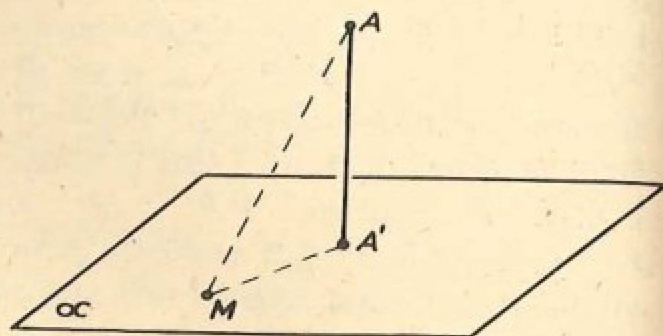


Fig. V.8.

Teorema 4. (Teorema celor trei perpendiculare.) Fie PA o dreaptă perpendiculară pe un plan α ($A \in \alpha$), d o dreaptă conținută în planul α și $AB \perp d$, $B \in d$. Atunci $PB \perp d$ (fig. V.7).

Demonstrație. Deoarece $d \perp AP$, $d \perp AB$, rezultă că d este perpendiculară pe orice dreaptă conținută în (PAB) (teorema 1), deci $d \perp PB$.

Teorema reciprocă 1. Dacă $PA \perp \alpha$, $A \in \alpha$, $d \subset \alpha$, $PB \perp d$, $B \in d$, atunci $AB \perp d$ (fig. V.7).

Teorema reciprocă 2. Dacă $A \in \alpha$, $d \subset \alpha$, $AB \perp d$, $B \in d$, $PB \perp d$, $PA \perp AB$, atunci $PA \perp \alpha$ (fig. V.7).

Demonstrațiile teoremelor reciproce se lasă ca exercițiu.

Să considerăm un plan α și un punct $A \notin \alpha$. Dacă $AA' \perp \alpha$, $A' \in \alpha$, punctul A' se numește *piciorul perpendicularei din A pe planul* α sau *proiecția ortogonală a punctului A pe planul* α, iar numărul AA', notat cu $d(A, \alpha)$, se numește *distanța de la punctul A la planul* α (fig. V.8). Dacă $A \in \alpha$, $d(A, \alpha) \stackrel{def}{=} 0$.

Teorema 5. Fie un plan α, un punct $A \notin \alpha$ și $M \in \alpha$. Atunci distanța de la A la α este mai mică sau egală cu distanța AM.

Demonstrație. A' fiind piciorul perpendicularei din A pe planul α, dacă $A' \neq M$ în triunghiul dreptunghic $AA'M$ segmentul $[AA']$ este o catetă, iar $[AM]$ ipotenuza.

Observație. Distanța de la un punct A la o dreaptă a (care nu trece prin A) se definește ca și în geometria plană: ducînd în planul (Aa) perpendiculara din A pe a și notînd cu A' piciorul acesteia, distanța de la A la a este dată de $d(A, a) = AA'$. Se știe că $d(A, a)$ este cea mai mică dintre distanțele AM, unde $M \in a$.

Exerciții

12. Fie ABC un triunghi isoscel ($(AB) \equiv (AC)$), M mijlocul laturii $[BC]$ și AN perpendiculară pe (ABC); arătați că $MN \perp BC$.

13. Fie A', B', C' picioarele perpendicularelor duse dintr-un punct oarecare P din spațiu pe laturile triunghiului ABC. Arătați că ducînd în planul (ABC) perpendicularele

pe laturile lui ABC în A', B', C', se obțin trei drepte concurente. Generalizare pentru un poligon.

14. Pe planul paralelogramului $ABCD$ se ridică perpendiculara AE. Să se calculeze distanțele de la punctul E la dreptele BC și CD, știind că $AB = 2a$, $AD = AE = a$ și $m(\widehat{BAD}) = 60°$.

15. Se dau: planul α și punctele $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$. O dreaptă variabilă d trece prin A și este conținută în planul α. Să se afle locul geometric al picioarelor perpendicularelor din B pe d.

16. Se dau: dreapta a și punctul $A \notin a$. Se cere locul geometric al picioarelor perpendicularelor din A pe planele care trec prin a.

17. Se consideră un plan α care trece prin mijlocul unui segment $[AB]$. Să se arate că punctele A și B sînt egal depărtate de planul α.

18. Determinați un plan care să treacă printr-o dreaptă dată, să fie echidistant de două puncte A și B date și să separe punctele A și B.

Indicație. Planul va trece prin mijlocul segmentului $[AB]$.

19. Printr-un punct dat să se ducă o dreaptă care să intersecteze o dreaptă dată și să fie perpendiculară pe o altă dreaptă dată.

20. Fie α și β două plane distincte, a căror intersecție este dreapta d și fie M un punct nesituat în $\alpha \cup \beta$. Se duc dreptele MM_1 și MM_2, perpendiculare respectiv pe α, β. Să se arate că dreapta d este perpendiculară pe planul (MM_1M_2).

21. Fie α un plan, d o dreaptă în α și A un punct exterior lui α. Din A se duce perpendiculara AB pe $d (B \in d)$, iar prin B perpendiculara d' pe d, situată în α. Se ia pe d' punctul C astfel ca $\widehat{ABC}$ să fie un unghi ascuțit și $(BC) \equiv (AB)$. Din C se duce perpendiculara CC' pe AB $(C' \in AB)$ și se ia pe (CB) punctul D astfel ca $(CD) \equiv (AC')$. Să se arate că dreapta AD este perpendiculară pe planul α.

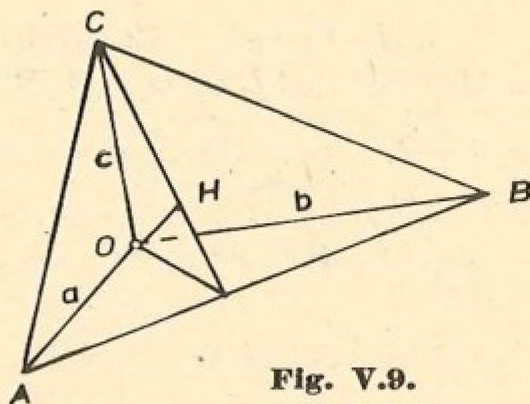


Fig. V.9.

22*. Se dau un plan α și un punct $A \notin \alpha$. Să se afle locul geometric al punctelor $M \in \alpha$ astfel ca segmentul (AM) să aibă o lungime dată.

23. Fie O punctul de intersecție al mediatoarelor unui triunghi ABC și M un punct nesituat în planul (ABC). Să se arate că $OM \perp (ABC)$ dacă și numai dacă $(AM) \equiv (BM) \equiv (CM)$.

24. Fie O, A, B, C patru puncte astfel ca $OA \perp OB \perp OC \perp OA$ și se notează $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$. 1) Să se calculeze lungimile laturilor triunghiului ABC în funcție de a, b, c. 2) Să se calculeze aria $\sigma[ABC]$ și să se demonstreze relația $\sigma[ABC]^2 = \sigma[OAB]^2 + \sigma[OBC]^2 + \sigma[OCA]^2$. 3) Să se arate că proiecția ortogonală a punctului O pe planul (ABC) este ortocentrul H al triunghiului ABC. 4) Să se calculeze distanța OH.

Indicație. 3) Se va arăta că $AB \perp CO$, $AB \perp OH$, din care se deduce că $AB \perp CH$ (fig. V.9).

25*. Se consideră punctele necoplanare A, B, C, D şi dreptele AA', BB', CC', DD' perpendiculare respectiv pe planele (BCD), (ACD), (ABD), (ABC). Să se arate că dacă dreptele AA' şi BB' sînt concurente, atunci dreptele CC', DD' sînt coplanare.

Indicaţie. Din $CD \perp AA', BB'$ se va deduce că $CD \perp AB$. În continuare se va folosi faptul că prin CD putem duce un plan perpendicular pe AB.

26*. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Să se arate că $AB \perp CD$ şi $AC \perp BD$ implică $AD \perp BC$.

27*. Pe muchiile unui unghi triedru cu vîrful O se iau punctele A, B, C, astfel ca $(OA) \equiv (OB) \equiv (OC)$. Să se arate că piciorul perpendicularei din O pe planul (ABC) coincide cu punctul de intersecţie al mediatoarelor triunghiului ABC.

§ 2. Inegalităţi geometrice. Unghiul unei semidrepte cu un plan

Temă. *Dacă triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ au $(AB) \equiv (A'B')$, $(AC) \equiv (A'C')$, $\hat{A} > \hat{A}'$, atunci $(BC) > (B'C')$.*

Demonstraţie. Construim punctul D în semiplanul lui C, faţă de AB, astfel ca $\triangle ABD \equiv \triangle A'B'C'$, (fig. V.10). Atunci triunghiul ADC este isoscel şi $(AD \subset \text{Int } \widehat{BAC}$, deci şi bisectoarea unghiului $\widehat{CAD}$ va fi situată în interiorul lui $\widehat{BAC}$, prin urmare aceasta va intersecta segmentul (BC) într-un punct E. Rezultă $(EC) \equiv (ED)$ şi $BC = BE + EC = BE + ED > BD = B'C'$.

Corolar. *Dacă triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ au $(AB) \equiv (A'B')$, $(AC) \equiv (A'C')$, $(BC) > (B'C')$, atunci $\hat{A} > \hat{A}'$.*

Demonstraţi corolarul prin reducere la absurd!

Să considerăm un plan dat α şi o semidreaptă dată $[AB$ cu $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$. Vom studia unghiurile formate de $[AB$ cu diferitele semidrepte de origine A, situate în planul α. Dacă $AB \perp \alpha$, toate aceste unghiuri sînt con-

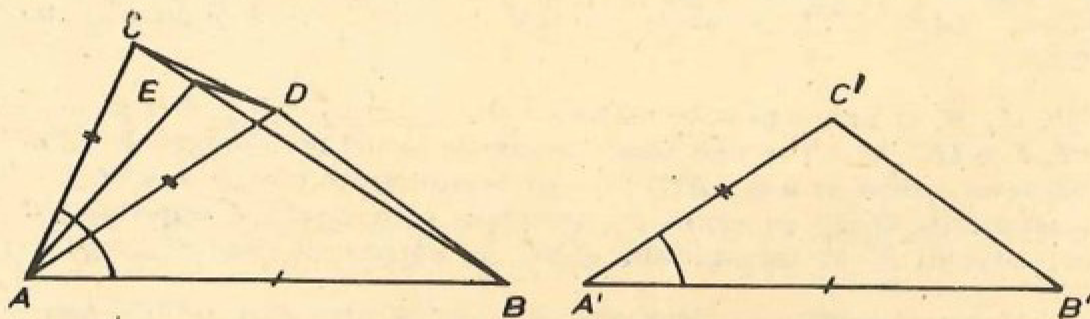


Fig. V.10.

gruente. Dacă AB nu este perpendicular pe α, unul dintre ele este mai mic decît celelalte; teorema următoare precizează acest unghi.

Teorema 1. Fie α un plan, $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$, iar B' proiecţia ortogonală a punctului B pe planul α (fig. V.11). Oricare ar fi punctul $M \in \alpha - [AB'$, avem

$$\widehat{B'AB} < \widehat{MAB}.$$

Demonstraţie. Determinăm punctul $N \in (AM$ astfel ca $(AN) \equiv (AB')$. Deoarece BB' este distanţa de la B la planul α rezultă $BN > BB'$ şi aplicînd corolarul de mai sus triunghiurilor ABN şi ABB', obţinem că $\widehat{NAB} > \widehat{B'AB}$.

Definiţie. Unghiul $\widehat{B'AB}$ se numeşte *unghiul semidreptei* $[AB$ *cu planul* α. El este cel mai mic unghi format de $[AB$ cu o semidreaptă de origine A, inclusă în α. Unghiul $\widehat{B'AB}$ se mai numeşte *unghiul dreptei* AB *cu planul* α.

Exerciţii

1. Cu notaţiile figurii V.11 avem de asemenea: $\widehat{MAB'} < \widehat{MAB}$.

Indicaţie. Fie $MM' \perp AB'$, $M' \in AB'$. Cum $MM' \perp BB'$, dreapta MM' este perpendiculară pe planul (ABB'). Aplicaţi teorema 1 semidreptei $[AM$ şi planului (ABB').

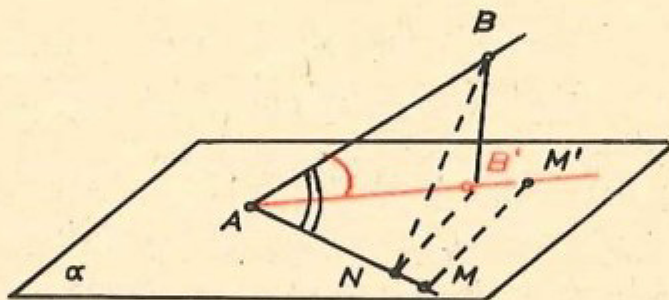


Fig. V.11.

2. Vîrful A al triunghiului isoscel ABC ($(AB) \equiv (AC)$) se proiectează ortogonal în A' pe un plan α care trece prin BC. Arătaţi că $\widehat{BA'C} > \widehat{BAC}$ (fig. V.12).

Indicaţie. Fie D mijlocul lui $[BC]$ şi $E \in (DA'$, $(DE) \equiv (DA)$. $\widehat{DA'C}$ este un unghi exterior al triunghiului $A'CE$.

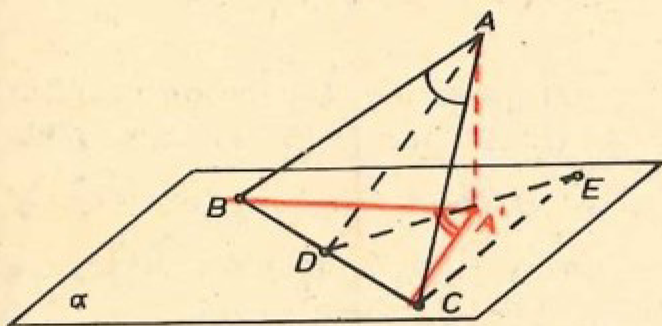


Fig. V.12.

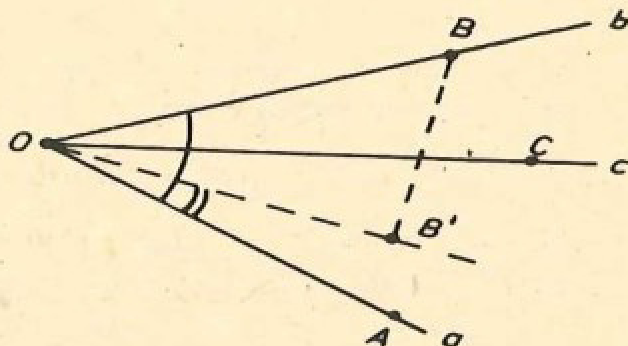


Fig. V.13.

Teorema 2. *Într-un unghi triedru $\widehat{abc}$ avem*

$$m(\widehat{ab}) + m(\widehat{bc}) > m(\widehat{ac}).$$

Demonstrație. Fie O vîrful lui $\widehat{abc}$, A, B, C cîte un punct pe a, b, c, distincte de O, iar B' piciorul perpendicularei din B pe planul (OAC) (fig. V.13). Conform exercițiului 1

$$m(\widehat{ab}) > m(\widehat{AOB'}), \quad m(\widehat{bc}) > m(\widehat{B'OC}).$$

Dacă $B' \in \text{Int } \widehat{AOC}$ sau $B' \in \widehat{AOC}$, suma $m(\widehat{AOB'}) + m(\widehat{B'OC})$ este egală cu $m(\widehat{ac})$, iar dacă B' este în exteriorul unghiului $\widehat{AOC}$, atunci această sumă este mai mare decît $m(\widehat{ac})$. În orice caz

$$m(\widehat{AOB'}) + m(\widehat{B'OC}) \geqslant m(\widehat{ac})$$

și teorema rezultă din inegalitățile stabilite.

Exerciții

3. Cu notațiile teoremei 1, fie $[AB''$ semidreapta opusă lui $[AB'$. Să se arate că pentru orice punct $M \in \alpha - [AB''$ avem $\widehat{B''AB} > \widehat{MAB}$.

4*. Arătați că pentru orice unghi triedru $\widehat{abc}$ avem: $m(\widehat{ab}) + m(\widehat{bc}) + m(\widehat{ca}) < 360°$.

5*. Fie α un plan, $A \in \alpha$, iar B și C două puncte de aceeași parte a lui α astfel ca $AC \perp \alpha$. Arătați că $\widehat{CAB}$ este un complement al unghiului format de $[AB$ cu α.

6*. Fie $\widehat{\alpha'\beta'}$ un unghi diedru cu muchia m și $A \in m$. Să se arate că dintre toate semidreptele cu originea A și conținute în semiplanul β', aceea formează unghiul cel mai mare posibil cu planul α, care este perpendiculară pe m (suportul ei se numește *dreapta de cea mai mare pantă* a lui β față de α).

§ 3. Măsura unui unghi diedru. Plane perpendiculare

Fie $\widehat{\alpha'\beta'}$ un unghi diedru propriu și O, O' două puncte oarecare pe muchia lui. Se duc în semiplanul α' semidreptele $(OA$, $(O'A'$, iar în β' semidreptele $(OB$, $(O'B'$ toate perpendiculare pe OO' (fig. V.14). Unghiurile $\widehat{AOB}$ și $\widehat{A'O'B'}$ au laturile paralele; mai mult, ele se găsesc în situația de pe figura IV.23 și din demonstrația teoremei 4 de la Cap. IV. § 5 rezultă că

$$\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'}. \tag{1}$$

Definiție. Prin *măsura unghiului diedru propriu* $\widehat{\alpha'\beta'}$ înțelegem numărul $m(\widehat{\alpha'\beta'}) \stackrel{def}{=} m(\widehat{AOB})$.

Relația (1) ne arată că acest număr nu depinde de alegerea lui $O \in d$, deci el este determinat unic pentru fiecare unghi diedru propriu. Prin definiție, un unghi diedru nul (respectiv plat) are ca măsură 0° (respectiv 180°).

Definiție. Semiplanele α' și β' se zic *perpendiculare* dacă $m(\widehat{\alpha'\beta'}) = 90°$. În acest caz și planele α, β, care conțin semiplanele α', β', se numesc *perpendiculare* și se notează $\alpha \perp \beta$. Evident $\alpha \perp \beta \Rightarrow \beta \perp \alpha$.

Exerciții

1. Fie α un plan, σ un semispațiu închis limitat de α, α' un semiplan conținut în α și a un număr real, cuprins între 0 și 180. Să se arate că există un singur semiplan β', avînd frontieră comună cu α', astfel încît $\beta' \subset \sigma$ și $m(\widehat{\alpha'\beta'}) = a$.

Indicație. Problema revine la construirea unui unghi într-un plan perpendicular pe frontiera lui α'.

◇ **2.** Fie $\widehat{\alpha'\beta'}$ un unghi diedru propriu. Construiți un semiplan γ' astfel ca $m(\widehat{\alpha'\gamma'}) = m(\widehat{\gamma'\beta'})$. Arătați că problema are două soluții dintre care una este situată în Int $\widehat{\alpha'\beta'}$ (numit *semiplanul bisector* al lui $\widehat{\alpha'\beta'}$; suportul său se numește *planul bisector* al lui $\widehat{\alpha'\beta'}$).

3. Să se arate că locul geometric al punctelor egal depărtate de două plane secante α, β este format din două plane perpendiculare, și anume din reuniunea planelor bisectoare ale unghiurilor diedre determinate de α și β.

Teorema 1. Dacă d este o dreaptă perpendiculară pe un plan α, atunci orice plan β care conține dreapta d, este perpendicular pe planul α (fig. V.15).

Demonstrație. Dacă $a = \alpha \cap \beta$, $\{A\} = d \cap \alpha$ și α', β' sînt semiplane de suport α respectiv β, limitate de a, atunci ducînd prin A, în planul α, dreapta b perpendiculară pe a, avem $d \perp b$, deci $m(\widehat{\alpha'\beta'}) = 90°$.

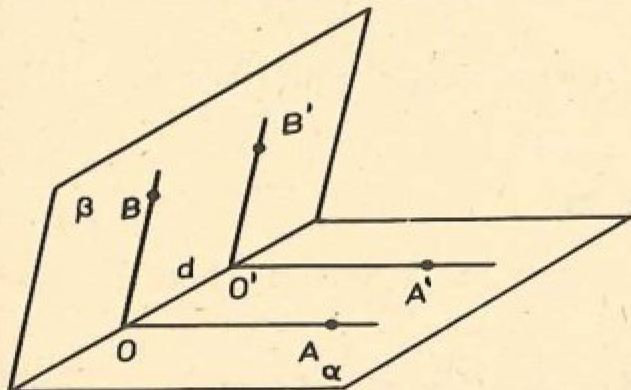


Fig. V.14.

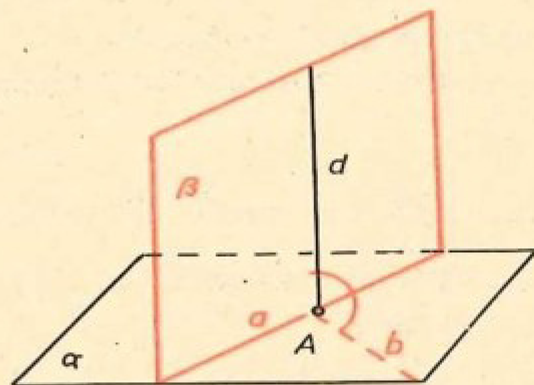


Fig. V.15.

Exerciţii

◇ **4.** Dacă α şi β sînt două plane perpendiculare, $Q \in \beta$ şi d perpendiculara prin Q pe α, să se arate că $d \subset \beta$.

5. Se consideră o dreaptă d inclusă în planul α. Arătaţi că reuniunea dreptelor perpendiculare pe α, care intersectează dreapta d, este un plan perpendicular pe α.

6. Să se afle locul geometric al punctelor la egală distanţă de două drepte concurente.

7. Arătaţi că un plan α perpendicular pe două plane secante este perpendicular pe intersecţia lor.

8*. Fie A un punct nesituat în planul α. Să se afle intersecţia tuturor planelor care conţin punctul A şi sînt perpendiculare pe planul α.

9*. Duceţi printr-o dreaptă dată un plan perpendicular pe un plan dat.

10*. Duceţi printr-un punct dat un plan perpendicular pe două plane date.

11*. Intersectaţi un unghi diedru cu un plan astfel ca unghiul de secţiune să fie drept.

12. Arătaţi că o dreaptă d şi un plan α, perpendiculare pe un alt plan, sînt paralele între ele sau dreapta d este conţinută în planul α.

13. Fie α şi β două plane perpendiculare, $A \in \alpha$, iar d o dreaptă perpendiculară pe β. Să se arate că paralela prin A la d este conţinută în planul α.

14. Dacă trei plane perpendiculare pe un plan se intersectează două cîte două după dreptele a, b, c arătaţi că $a \parallel b \parallel c$.

15*. Dintr-un punct A se duc perpendicularele AB şi AC pe planele feţelor unui unghi diedru $\widehat{\alpha'\beta'}$. Să se arate: $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{\alpha'\beta'})$ sau $m(\widehat{BAC}) = 180° - m(\widehat{\alpha'\beta'})$.

§ 4. Proiecţii ortogonale

Proiecţia (ortogonală) a unui punct P pe un plan α a fost definită în § 1 ca intersecţia cu planul α a perpendicularei pe α, dusă prin punctul P. Ea se notează: $P^* = pr_\alpha P$.

Prin *proiecţia unei mulţimi* $\mathcal{M}$ pe un plan α se înţelege mulţimea

$$pr_\alpha \mathcal{M} = \{pr_\alpha P \mid P \in \mathcal{M}\},$$

formată din proiecţiile tuturor punctelor din $\mathcal{M}$.

Teorema 1. Proiecţia unei drepte d pe un plan α este o dreaptă sau un punct.

Demonstraţie. Dacă $d \perp \alpha$, este clar că $pr_\alpha d$ este un punct. Să presupunem în continuare că dreapta $d = AB$ nu este perpendiculară pe planul α

(fig. V.16) şi $A \notin \alpha$. Fie A^*, B^* proiecţiile lui A, B pe α şi $\beta = (AA^* B)$. Deoarece β conţine o dreaptă perpendiculară pe α rezultă că $\beta \perp \alpha$. Fie M un punct oarecare de pe dreapta d şi $M^* = \mathrm{pr}_\alpha M$. Atunci $MM^* \parallel AA^*$ şi $MM^* \subset \beta$, deci $M^* \in \alpha \cap \beta = A^*B^*$. Astfel am arătat că $\mathrm{pr}_\alpha d \subset A^*B^*$.

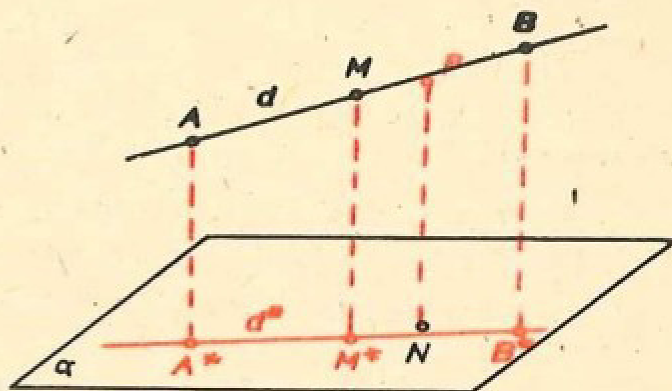


Fig. V.16.

Pentru a demonstra incluziunea contrară, luăm un punct oarecare $N \in A^*B^*$ şi arătăm că $N \in \mathrm{pr}_\alpha d$. Paralela la AA^*, dusă prin N, este conţinută în planul β, deci va intersecta dreapta d într-un punct P. Atunci $N = \mathrm{pr}_\alpha P$, deci $N \in \mathrm{pr}_\alpha d$.

Planul β, determinat prin $\beta \perp \alpha$ şi $\beta \supset d$, se numeşte *planul proiectant* al dreptei d. Reţinem că proiecţia dreptei d pe planul α poate fi obţinută prin intersecţia planului α cu planul proiectant al lui d.

Exerciţii

1. Să se arate: dacă dreptele d şi d' sînt paralele atunci $\mathrm{pr}_\alpha d \parallel \mathrm{pr}_\alpha d'$ sau $\mathrm{pr}_\alpha d = \mathrm{pr}_\alpha d'$. Ce putem spune despre planele proiectante ale lui d şi d'?

2. Arătaţi că proiecţia unui paralelogram pe un plan este un paralelogram sau un segment.

3. Ştiind că latura $[OA$ a unghiului drept $\widehat{AOB}$ este paralelă cu un plan α, să se arate că proiecţia pe planul α a unghiului $\widehat{AOB}$ este un unghi drept.

4. Fie $A'B'C'$ proiecţia triunghiului ABC pe un plan α. Arătaţi că centrul de greutate al triunghiului ABC se proiectează în centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$. Este valabil un rezultat analog pentru ortocentru?

5. Să se afle locul geometric al punctelor din spaţiu care se proiectează pe un plan după o dreaptă dată.

6*. Fiind date punctele necoplanare A, B, C, D, să se determine un plan pe care punctele A, B, C, D se proiectează în vîrfurile unui paralelogram.

7*. Se consideră toate triunghiurile din spaţiu care se proiectează pe un plan α după acelaşi triunghi. Să se afle locul geometric al centrelor lor de greutate.

8*. Fie A un punct nesituat pe dreapta d. Determinaţi un plan α astfel încît $\mathrm{pr}_\alpha d$ să treacă prin $\mathrm{pr}_\alpha A$.

9*. Determinaţi un plan pe care trei drepte date să se proiecteze după drepte concurente.

10*. Fie α, β două plane care se taie după o dreaptă a şi fie d o dreaptă perpendiculară pe a. Să se arate că proiecţiile dreptei d pe planele α, β sînt concurente.

11*. Se consideră un triunghi triedru astfel ca nici una din muchii să nu fie perpendiculară pe faţa opusă. Arătaţi că proiectînd muchiile pe feţele opuse, se obţin trei plane proiectante care conţin o dreaptă comună.

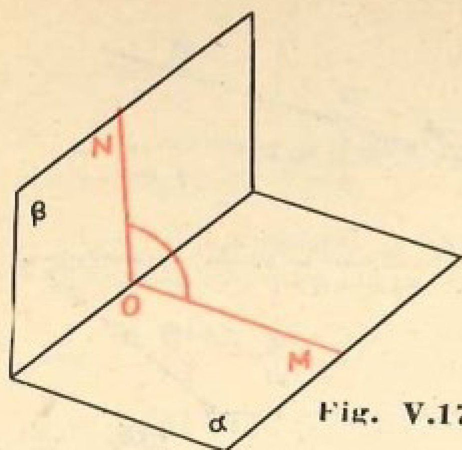


Fig. V.17.

Prin *unghiul a două plane* α și β, care se intersectează după dreapta d, vom înțelege oricare unghi $\widehat{MON}$, unde $O \in d$, $M \in \alpha$, $N \in \beta$, $OM \perp d$, $ON \perp d$ și $m(\widehat{MON}) \leqslant 90°$ (fig. V.17). Dacă $\alpha \parallel \beta$ sau $\alpha = \beta$, prin unghiul lui α și β înțelegem un unghi nul. Ca și unghiul a două drepte, nici acestă noțiune nu este determinată unic, dar toate unghiurile a două plane α și β sînt congruente între ele. Așadar, *măsura unghiului a două plane secante* este un număr unic, egal cu cea mai mică dintre măsurile unghiurilor diedre determinate de planele α și β.

Teorema 2. Dacă triunghiul ABC, situat în planul α, are aria S, proiecția lui ABC pe planul β are aria S' și măsura unghiului celor două plane este φ, atunci

(1) $$S' = S \cos \varphi.$$

Demonstrația se face în trei etape.

1) Fie latura $[BC]$ a triunghiului ABC situată în planul β (fig. V.18), $A' = pr_\beta A$ și $D = pr_{BC} A$. Conform teoremei celor trei perpendiculare $A'D \perp BC$, deci $\varphi = \mu(\widehat{ADA'})$. Din egalitățile $S = \frac{BC \cdot AD}{2}$, $S' = \frac{BC \cdot A'D}{2}$, $A'D = AD \cdot \cos \varphi$ deducem imediat relația (1).

2) Latura $[BC]$ este paralelă cu planul β (fig. V.19). Fie A', B', C' proiecțiile punctelor A, B, C pe planul β. Putem duce prin dreapta BC un plan β^* paralel cu β, care taie dreapta AA' în A^*. Se observă că patrulaterele $BCC'B'$, $CA^*A'C'$, $A^*BB'A'$ sînt dreptunghiuri, deci $\triangle A^*BC \equiv \triangle A'B'C'$ și aceste

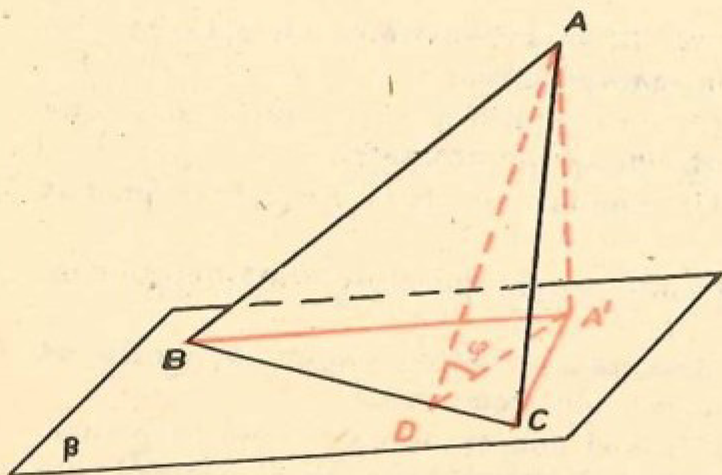


Fig. V.18.

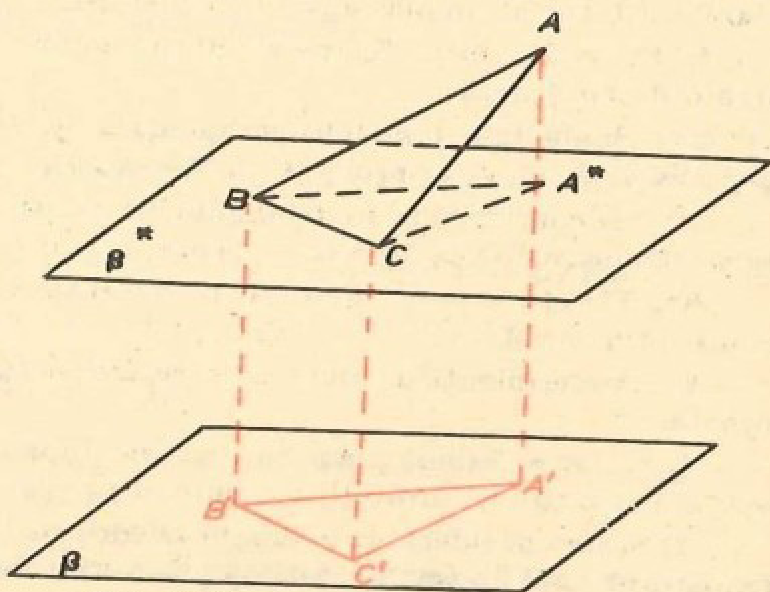


Fig. V.19.

triunghiuri au arii egale. Ținînd seama și de faptul că planul α determină cu planele β și β^* unghiuri de aceeași măsură, formula (1) este valabilă și în acest caz.

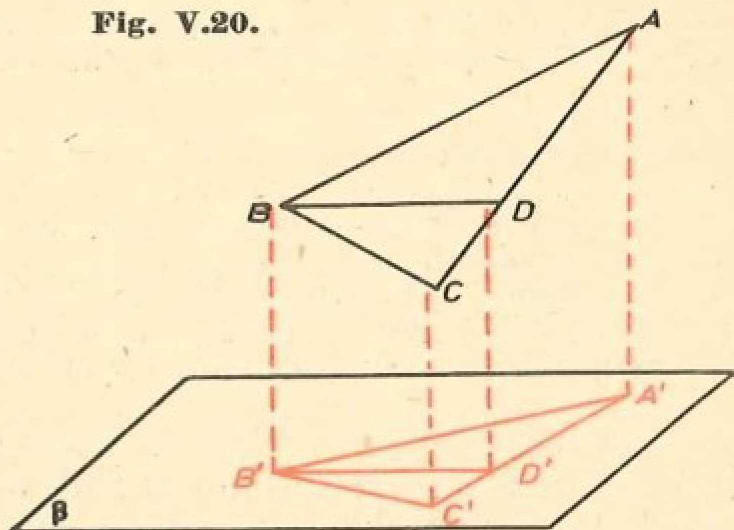


Fig. V.20.

3) Considerînd cazul general putem presupune că $(CC') < (BB') < (AA')$. Intersectăm planul paralel cu β, dus prin B, cu planul α după dreapta BD (unde $D \in (AC)$). Punctele A, B, C, D se proiectează pe planul β în A', B', C', D' (fig. V.20). Notînd cu S_1, S_2, S_1', S_2' ariile triunghiurilor ABD, CBD, $A'B'D'$ respectiv $C'B'D'$, putem scrie conform cazului 2):

(2) $$S_1' = S_1 \cos \varphi,\ S_2' = S_2 \cos \varphi.$$

Dar $S_1 + S_2 = S$, $S_1' + S_2' = S'$, deci adunînd membru cu membru egalitățile (2), se obține relația (1).

Exerciții

12. Arătați că formula (1) este valabilă și în cazul în care S reprezintă aria unei suprafețe poligonale situate în planul α, iar S' aria proiecției ei pe planul β.

Indicație. Descompuneți suprafața poligonală în triunghiuri.

13. Fie ABC un triunghi, $AB = 9$, $BC = 10$, $AC = 17$. Proiecția triunghiului ABC pe un plan β are aria egală cu 18. Să se afle măsura unghiului planelor (ABC) și β.

14. Se dă triunghiul ABC cu laturile $BC = 4$, $CA = 6$, $AB = 3$. Se ridică în A, B, C perpendiculare pe planul triunghiului și se iau pe ele, de aceeași parte a planului (ABC), punctele A', B', C' astfel ca $AA' = 2$, $BB' = 6$, $CC' = 9$. Să se calculeze măsura unghiului planelor (ABC) și $(A'B'C')$.

15. Triunghiul ABC, avînd laturile $AB = 5$, $AC = 12$, $BC = 13$, se proiectează pe un plan paralel cu latura $[AC]$ după triunghiul $A'B'C'$. Știind că $A'B' = 4$, să se calculeze $B'C'$ și măsura unghiului planelor (ABC) și $(A'B'C')$.

16. Se consideră dreptele OA, OB, OC, perpendiculare două cîte două. Știind că $OA = a$, $OB' = b$, $OC = c$, să se calculeze măsura unghiului planelor (ABC) și (OAB).

17. Să se arate că pătratul lungimii unui segment este egal cu semisuma pătratelor lungimilor proiecțiilor acelui segment pe trei plane perpendiculare două cîte două.

18. O dreaptă taie două plane perpendiculare α și β în A și B. Fie A', B' proiecțiile punctelor A, B pe dreapta $\alpha \cap \beta$. 1) Arătați că $AB^2 = AA'^2 + A'B'^2 + B'B^2$. 2) Dacă a, b, c sînt măsurile unghiurilor dreptei AB cu planele α, β și cu $\alpha \cap \beta$, atunci

$$\cos c = \frac{A'B'}{AB} \text{ și } \sin^2 a + \sin^2 b = \sin^2 c.$$

19. Fie ABC un triunghi situat într-un plan α, $A'B'C'$ proiecţia lui pe un plan β, iar $A''B''C''$ proiecţia triunghiului $A'B'C'$ pe planul α. Notînd cu S, S', S'' ariile triunghiurilor ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ să se arate că S' este medie proporţională între S şi S''.

Exerciţii recapitulative

1. Un tetraedru $[ABCD]$ are $(AC) \equiv (AD) \equiv (BC) \equiv (BD)$. M şi N fiind mijloacele muchiilor $[AB]$, $[CD]$, să se arate:

a) $MN \perp AB$, $MN \perp CD$, $AB \perp CD$.

b) Dacă A', B', C', D' sînt picioarele perpendicularelor duse din vîrfurile A, B, C, D pe feţele opuse ale tetraedrului, punctele B, A', N sînt coliniare, şi la fel A, B', N; D, C', M; C, D', M.

c) AA', BB', MN şi CC', DD', MN sînt cîte trei drepte concurente.

2. Dacă semidreptele $[OA$ şi $[OB$ au originea lor în planul α, $OA \perp \alpha$ şi $OB \perp \alpha$ atunci cele două semidrepte formează un unghi ascuţit sau obtuz, după cum sînt sau nu de aceeaşi parte a planului α.

3. a) Arătaţi că cele şase plane mediatoare ale muchiilor unui tetraedru au un punct comun. b) Prin acest punct trec şi perpendicularele pe feţele tetraedrului, duse prin centrele cercurilor circumscrise acestor feţe.

4. Să se afle locul geometric al punctelor din spaţiu care au diferenţa pătratelor distanţelor lor la două puncte date egală cu un număr dat.

5. Se dau un plan α, un punct $A \in \alpha$, un punct $B \notin \alpha$ şi un unghi $\widehat{hk}$. Să se construiască o semidreaptă $[AM$, inclusă în planul α, care să formeze cu $[AB$ un unghi congruent cu $\widehat{hk}$. Discuţie.

◇ **6.** Fie d şi d' două drepte necoplanare. Să se arate că există punctele unice $A \in d$, $A' \in d'$ astfel ca $AA' \perp d$ şi $AA' \perp d'$. (Dreapta AA' se numeşte *perpendiculara comună* a dreptelor d şi d'.)

Indicaţie. Există un plan unic α care trece prin d şi este paralel cu d'. Cum $A'A$ trebuie să fie conţinut în planul proiectant al lui d' pe α, punctul A coincide cu $d \cap \text{pr}_\alpha d'$, iar A' cu intersecţia lui d' cu perpendiculara pe α, ridicată în punctul A (fig. V.21).

◇ **7.** Cu notaţiile exerciţiului 6 fie $M \in d$, $M' \in d'$. Să se arate că $AA' \leqslant MM'$, egalitatea fiind posibilă numai dacă $M = A$ şi $M' = A'$.

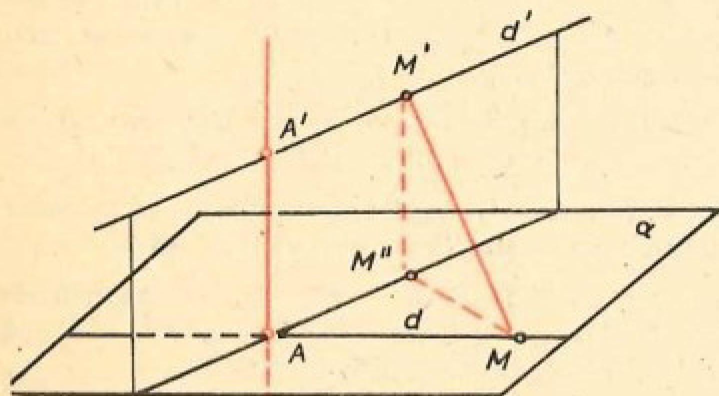


Fig. V.21.

8*. Fie AA' perpendiculara comună a dreptelor necoplanare d, d' şi $M \in d$, $M' \in d'$ astfel ca $(AM) \equiv (A'M')$. Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului $[MM']$.

9. Într-un plan α se dau două drepte perpendiculare d_1, d_2 care se intersectează în punctul O. Distanţele unui punct M din spaţiu, nesituat în planul α, la dreptele d_1 şi d_2 sînt egale respectiv cu $3a$ şi $4a$, iar $MO = 3a\sqrt{2}$. Să se calculeze distanţa de la M la planul α.

10. Se consideră un tetraedru $[VABC]$ cu următoarele proprietăţi: ABC este un triunghi echilateral de latură a

$(ABC) \perp (VBC)$, iar planele (VAC) și (VAB) formează cu planul (ABC) unghiuri de măsură $60°$. Să se calculeze distanța de la punctul V la planul (ABC).

11. Se dă dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 4$ și $BC = 2$. Pe planul dreptunghiului se ridică perpendicularele AA_1, BB_1, CC_1 și DD_1, punctele A_1, B_1, C_1, D_1 fiind de aceeași parte a planului (ABC) și $AA_1 = 3$, $BB_1 = 8$, $CC_1 = 1$, $DD_1 = 2$. M și N fiind mijloacele segmentelor $[A_1C_1]$ respectiv $[B_1D_1]$, să se calculeze lungimea segmentului $[MN]$.

12. Toate muchiile unui tetraedru au lungimea a. Să se arate că un vîrf se proiectează pe fața opusă în centrul de greutate al acesteia. Să se afle măsura unghiurilor diedre determinate de cîte două fețe.

13. Se consideră un tetraedru $[ABCD]$ astfel ca $AB = AC = a$, $m(\widehat{BAC}) = \alpha$ și semidreptele $[AD$, $[BD$, $[CD$ formează cu planul (ABC) unghiuri congruente, de măsura β. Să se calculeze distanța de la punctul D la planul (ABC).

14. Fie DE o dreaptă perpendiculară pe planul pătratului $ABCD$. Știind că $BE = l$ și măsura unghiului format de $[BE$ și (ABC) este β, să se determine lungimea segmentului $[AE]$ și unghiul lui $[AE$ cu planul (ABC).

15. Dreapta CD este perpendiculară pe planul triunghiului echilateral ABC de latură a, iar $[AD$ și $[BD$ formează cu planul (ABC) unghiuri de măsură β. Să se găsească unghiul planelor (ABC) și (ABD).

16*. Într-un tetraedru $[ABCD]$ avem $DA = DB = DC = l$, $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{ADC}) = \alpha$ și $m(\widehat{BDC}) = \beta$. Să se afle distanța punctului D la planul (ABC) și distanța punctului A la planul (BCD).

17*. Se dau: un plan α, punctele necoliniare A, B, C, exterioare acestui plan și un triunghi $DEF \subset \alpha$. Să se determine un punct P astfel încît, notînd cu A', B', C' punctele de intersecție ale dreptelor PA, PB, PC cu planul α, triunghiurile $A'B'C'$ și DEF să aibă laturile respective paralele.

18*. Fiind date planul α și triunghiurile ABC, $A'B'C'$ nesituate în acest plan, să se determine un triunghi DEF, așezat în planul α, astfel încît, pe de o parte dreptele AD, BE, CF și pe de altă parte dreptele $A'D$, $B'E$, $C'F$ să fie concurente.

Capitolul VI

Poliedre

În capitolele VI și VII se vor studia unele mulțimi de puncte din spațiul euclidian numite adesea *corpuri geometrice*. Pentru ele se vor defini noțiuni și se vor demonstra proprietăți analoage cu cele stabilite în cazul geometriei plane pentru suprafețele poligonale.

Spațiul euclidian este un model matematic al spațiului fizic, el reflectînd proprietățile privind forma corpurilor din spațiul fizic și poziția lor reciprocă. Corpurile geometrice pe care le vom studia sînt imagini matematice ale unor corpuri bine cunoscute din spațiul fizic. Această circumstanță specială, întîlnită în cazul geometriei euclidiene, ne permite ca în studiul ce-l vom întreprinde (cap. VI și cap. VII) să acordăm un rol important intuiției spațiale, cunoștințelor noastre obținute din contemplarea și studierea spațiului fizic. Unele teoreme vor fi date fără demonstrație, conținutul lor fiind justificat doar în mod intuitiv. Menționăm că teoremele respective pot fi demonstrate riguros în cadrul sistemului axiomatic din manual, dar acest lucru ar mări prea mult volumul expunerii.

Facem observația că noțiunile de congruență și asemănare a două mulțimi de puncte din plan se extind în spațiu și păstrează aceleași proprietăți. Mulțimile $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \subset \mathcal{S}$ se numesc *congruente* dacă există o funcție bijectivă $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ pentru care $PQ = f(P)f(Q)$ oricare ar fi punctele $P, Q \in \mathcal{M}$, iar funcția f se numește *izometrie*. Mulțimile $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ se numesc *asemenea* dacă există o funcție bijectivă $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ și o constantă $k > 0$, astfel încît $PQ = kf(P)f(Q)$ oricare ar fi punctele $P, Q \in \mathcal{M}$, iar funcția f se numește *asemănare*.

Dacă $[L]$ și $[L']$ sînt două suprafețe poligonale incluse respectiv în planele α și β și $[L] \equiv [L']$ atunci ariile lor sînt egale, iar dacă $[L]$ și $[L']$ sînt asemenea, k fiind raportul de asemănare, atunci raportul ariilor lor este k^2.

§ 1. Prisma

Definiție. Fie S o suprafață poligonală cu frontiera poligon, inclusă într-un plan α, d o dreaptă care nu este paralelă cu planul α și nici conținută în acesta și α' un plan paralel cu planul α. Pentru fiecare punct $M \in S$ se consideră dreapta care trece prin M, paralelă cu dreapta d și care intersectează

planul α' într-un punct M'. Mulţimea formată din reuniunea tuturor segmentelor $[MM']$ se numeşte *prismă* (fig. VI.1).

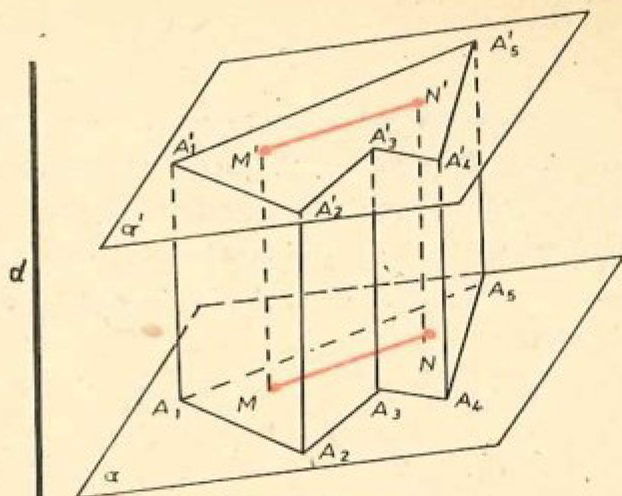


Fig. VI.1.

Proprietatea 1. Locul geometric al punctelor $M' \in \alpha'$ din definiţia precedentă este o suprafaţă poligonală S' şi $S \equiv S'$.

Demonstraţie. Se va arăta că legea $M \to M'$ defineşte o izometrie. Într-adevăr, dacă $M, N \in S$, $M \neq N$ şi $M \to M'$, $N \to N'$, rezultă $MNN'M'$ este un paralelogram (fig. VI.1), (planul (MNM') taie planele paralele α, α' după două drepte paralele). Rezultă că $S' \equiv S$.

Observaţie. Dacă $S = [A_1A_2 \dots A_n]$ şi $A_i \to A'_i$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ atunci din demonstraţia precedentă rezultă că $S' = [A'_1A'_2 \dots A'_n]$ şi au loc următoarele relaţii: $A_iA'_i \parallel A_jA'_j$, $[A_iA'_i] \equiv [A_jA'_j]$ pentru $i \neq j$, $(i, j = 1, 2, \dots, n)$, $A_iA_{i+1} \parallel A'_iA'_{i+1}$, $[A_iA_{i+1}] \equiv [A'_iA'_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$, şi $A_1A_n \parallel A'_1A'_n$, $[A_1A_n] \equiv [A'_1A'_n]$ (fig. VI.1). Pentru prescurtare, se va nota prisma cu $P = [A_1A_2 \dots A_nA'_1A'_2 \dots A'_n]$. Prisma este determinată dacă se dau vîrfurile ei.

Suprafeţele poligonale S, S', $[A_iA_{i+1}A'_{i+1}A'_i]$, $(i = 1, 2, \dots, n-1)$, $[A_1A_nA'_nA'_1]$ se numesc *feţele prismei*, segmentele $[A_iA_{i+1}]$, $[A'_iA'_{i+1}]$, $(i = 1, 2, \dots, n-1)$, $[A_1A_n]$, $[A'_1A'_n]$, $[A_iA'_i]$, $(i = 1, 2, \dots, n)$, se numesc *muchiile prismei*, iar punctele A_i, A'_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ se numesc *vîrfurile prismei*. Dintre acestea, S şi S' se mai numesc şi *bazele prismei* iar celelalte feţe se numesc *feţe laterale*, muchiile $[A_iA'_i]$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ se numesc *muchii laterale*. Distanţa dintre planele bazelor unei prisme se numeşte *înălţimea prismei* şi se va nota cu I. Prin înălţimea unei prisme se va mai înţelege şi segmentul determinat de bazele prismei pe perpendiculara comună. O *diagonală a unei prisme* este un segment determinat de două vîrfuri ale prismei care nu aparţin aceleiaşi feţe laterale.

Din demonstraţia proprietăţii 1 rezultă că poligoanele care determină feţele laterale ale unei prisme sînt paralelograme. Reuniunea feţelor unei prisme formează *suprafaţa* sau *frontiera prismei*. Mulţimea punctelor unei prisme care nu aparţin suprafeţei sale formează *interiorul prismei*.

Aria prismei

Suma ariilor feţelor unei prisme se numeşte *aria totală a prismei*, iar suma ariilor feţelor laterale se numeşte *aria laterală a prismei*; ele se vor nota respectiv cu $\sigma_t(P)$ şi $\sigma_l(P)$. Dacă $B = \sigma(S)$, evident

$$\boxed{\sigma_t(P) = \sigma_l(P) + 2B}$$

Prisma cu muchiile laterale perpendiculare pe planele bazelor se numeşte *prismă dreaptă*. Prisma cu poligoanele bazei paralelograme se numeşte *paralelipiped*. Paralelipipedul drept cu baza dreptunghi se numeşte *paralelipiped dreptunghic*. Dacă toate feţele unei prisme sînt suprafeţe pătrate, prisma se numeşte *cub*. Prisma dreaptă cu baza poligon regulat se numeşte *prismă regulată*.

Exerciţii

1. Să se demonstreze că proiecţiile unui punct din spaţiu pe muchiile laterale ale unei prisme sînt coplanare.

2. Se dă o prismă triunghiulară cu bazele $[ABC]$ şi $[A'B'C']$. Fie D, E, F centrele de simetrie respectiv ale feţelor $[BCC'B']$, $[ACC'A']$, $[ABB'A']$. Să se arate că dreptele AD, BE şi CF sînt concurente.

3*. Baza unei prisme este un triunghi echilateral cu latura $6\sqrt{3}$. Un vîrf al unei baze se proiectează pe cealaltă bază, în mijlocul unei muchii ale acesteia. Înălţimea prismei fiind 12, să se afle aria laterală a prismei.

4. Baza unei prisme este un pătrat cu latura a. Una din feţele laterale este pătrat, alta este un romb cu un unghi de măsură 60°. Să se afle aria totală a prismei.

5. Baza unei prisme este un triunghi echilateral cu latura a. Muchiile laterale formează cu planul bazei un unghi de măsură 60°. Unul din vîrfurile bazei se proiectează pe cealaltă bază în centrul cercului circumscris acesteia. Să se afle înălţimea prismei şi aria totală.

6. Într-o prismă triunghiulară distanţele dintre muchiile laterale sînt 3, 4 şi 5, iar lungimea muchiilor laterale este 6. Să se afle aria laterală a prismei.

7. Baza unei prisme este triunghi echilateral cu latura a; lungimea muchiilor laterale este b. Una din muchiile laterale formează cu muchiile adiacente ale bazei unghiuri cu măsura 60°. Să se afle aria laterală a prismei.

8. Într-o prismă triunghiulară, două feţe laterale sînt perpendiculare între ele şi au ariile respectiv de 60 şi 80. Să se afle aria laterală a prismei dacă lungimea muchiilor laterale este 10.

9*. Să se demonstreze că diagonalele unui paralelipiped sînt concurente, punctul de intersecţie al acestora fiind şi centrul de simetrie al paralelipipedului.

10*. Să se arate că într-un paralelipiped oarecare, suma pătratelor celor patru diagonale este egală cu suma pătratelor celor 12 muchii.

11*. Fie O un vîrf al unui paralelipiped oarecare iar A, B, C vîrfurile situate pe muchiile care conţin punctul O. Să se demonstreze că punctul G, în care diagonala paralelipipedului ce trece prin O intersectează (ABC), este centrul de greutate al triunghiului ABC şi că OG este $\frac{1}{3}$ din lungimea diagonalei respective.

12. Într-un paralelipiped dreptunghic cu baza pătrat, diagonalele au lungimea d şi fac cu feţele laterale unghiuri cu măsura 30°. Să se calculeze lungimile muchiilor paralelipipedului şi aria sa.

13*. Se dă un cub de latură 20. Să se afle distanța dintre o diagonală a cubului și o muchie laterală pe care nu o intersectează.

14. Să se calculeze sinusul unui unghi format de două diagonale ale unui cub.

15. Lungimea muchiei bazei unei prisme hexagonale regulate este a, iar înălțimea $2a$. Să se calculeze lungimile diagonalelor și măsurile unghiurilor pe care le formează acestea cu baza.

16. Într-un paralelipiped drept, muchiile bazei au lungimile a și b și formează un unghi de măsură 60°. Cea mai mare diagonală a bazei are lungimea egală cu lungimea celei mai mici diagonale a paralelipipedului. Să se afle lungimile diagonalelor paralelipipedului.

Secțiuni în prismă

Se consideră o prismă $P = [A_1A_2 \dots A_nA_1'A_2' \dots A_n']$ și un plan β. Dacă intersecția dintre prismă și plan nu este vidă, atunci mulțimea $\beta \cap P$ se numește *secțiunea prismei din planul* β. Se folosește în acest caz și exprimarea: planul β secționează prisma (fig. VI.2). Dintre diversele secțiuni ale unei prisme, un rol mai important îl au secțiunile prin plane paralele cu bazele.

Fie o prismă P de baze S și S' și înălțime I. Un plan β paralel cu bazele, la distanța I_1 de baza S, $I_1 < I$ și situat în același semispațiu cu baza S' față de S, secționează prisma P, deoarece, de exemplu, pe fiecare muchie laterală a prismei există un punct al planului β. Această secțiune se numește *secțiunea prismei printr-un plan situat la distanța* I_1 *de baza* S. Se poate considera că intersecția prismei cu planul unei baze este secțiunea printr-un plan situat la distanța $I_1 = 0$ sau $I_1 = I$ de baza S.

Proprietatea 2. *Secțiunea unei prisme de înălțime I printr-un plan situat la distanța $I_1 \leq I$ de una din baze este o suprafață poligonală congruentă cu bazele piramidei* (fig. VI.3).

Demonstrație. Se aplică proprietatea 1 în care planul α' se înlocuiește prin planul β.

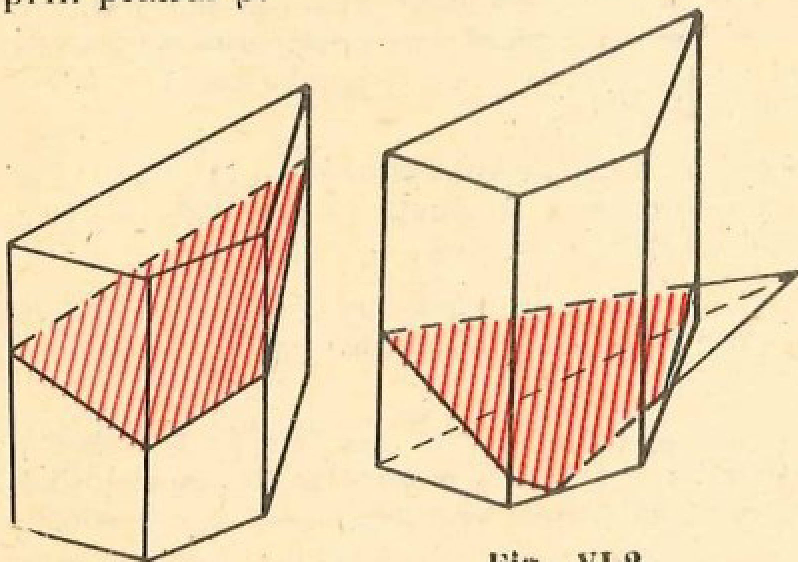


Fig. VI.2.

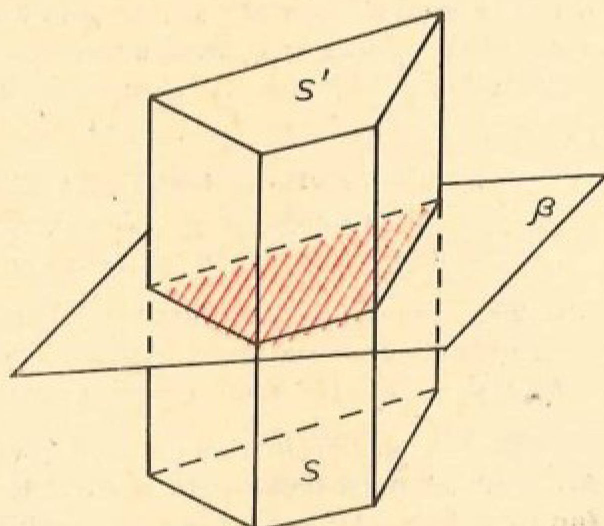


Fig. VI.3.

Observație. Prin secțiunea unei prisme printr-un plan paralel cu planele bazelor, distinct de acestea, se obțin două prisme P' și P'' care au o bază comună S'', au interioarele disjuncte și $P' \cup P'' = P$.

Dintre celelalte secțiuni ale unei prisme printr-un plan se mai definesc *secțiunile diagonale*, care sînt secțiunile prin plane paralele cu muchiile laterale ce conțin cîte o diagonală a bazei.

Exerciții

17. Să se arate că într-o prismă triunghiulară oblică distanța dintre o muchie laterală și fața opusă este egală cu înălțimea triunghiului obținut prin secționarea prismei cu un plan perpendicular pe muchiile laterale.

18*. Baza unui paralelipiped oblic este un romb $ABCD$ și muchia laterală $[AA']$ formează cu muchiile adiacente ale bazei unghiuri congruente. A'' fiind proiecția lui A' pe planul bazei, să se arate că punctele A, C, A'' sînt coliniare.

19*. Baza unui paralelipiped este un romb și planul uneia dintre secțiunile diagonale este perpendicular pe baze. Să se demonstreze că cealaltă secțiune diagonală este dreptunghi.

20. În prisma patrulateră regulată $[ABCDA'B'C'D']$ diagonalele $[AC']$ și $[BD']$ determină un unghi de măsură 60°. Să se demonstreze că secțiunea diagonală a prismei este un pătrat.

21*. Se dă cubul $[ABCDA'B'C'D']$. Să se demonstreze că mijloacele muchiilor cubului care nu conțin nici unul din vîrfurile A și C' sînt coplanare și sînt vîrfurile unui hexagon regulat.

22*. Se dă cubul $[ABCDA'B'C'D']$ de latură a și se consideră punctele: M mijlocul lui $[BC]$, P mijlocul lui $[AA']$ și O' centrul feței $[A'B'C'D']$. Se cere: a) forma secțiunii obținută prin secționarea cubului cu planul (MPO'), b) aria acestei secțiuni.

23. Într-o prismă triunghiulară regulată se consideră secțiunea determinată de o muchie a bazei și vîrful opus al celeilalte baze. Să se afle: 1) măsura unghiului diedru dintre planul de secțiune și planul bazei dacă lungimea muchiei bazei este egală cu înălțimea triunghiului de secțiune; 2) lungimea diagonalei feței laterale dacă lungimea muchiei bazei este a și secțiunea face cu baza un unghi de măsură 60°.

24. Se dă cubul $[ABCDA'B'C'D']$ de latură a. Pe semidreptele $[CB$, $[CD$, $[CC'$ se iau respectiv punctele P, Q, R astfel ca $(CP) \equiv (CQ) \equiv (CR)$ și $CP = x$. Să se calculeze aria și perimetrul secțiunii cubului prin planul (PQR). (Discuție.)

25. Fie cubul $[ABCDA'B'C'D']$ de latură a. Să se construiască poligonul obținut prin secționarea cubului cu planul determinat de vîrful C' și mijloacele segmentelor $(A'D')$ și (BC) și să se afle aria și perimetrul acestei secțiuni.

26. Să se construiască secțiunea unei prisme triunghiulare regulate $[ABCA'B'C']$ printr-un plan ce trece prin vîrful A, mijlocul M al muchiei laterale $[BB']$ și este paralel cu BC. Să se calculeze aria secțiunii dacă muchia bazei are lungimea a și muchia laterală $2a$.

§ 2. Piramida

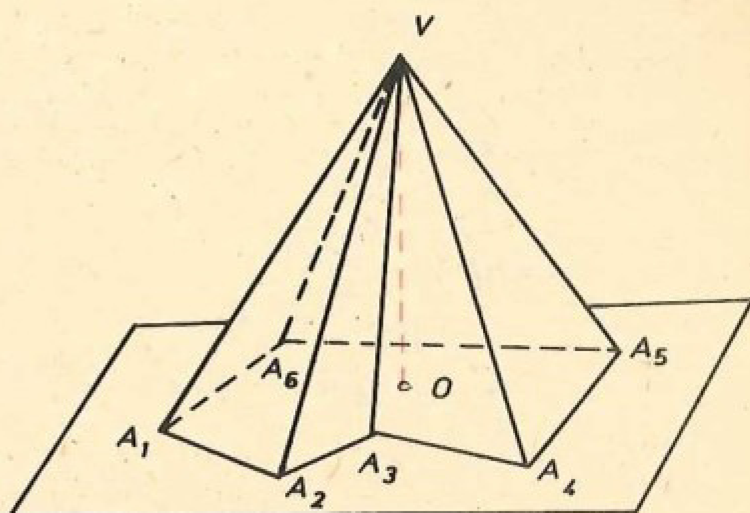


Fig. VI.4.

Definiție. Fie $S = [A_1A_2...A_n]$ o suprafață poligonală cu frontiera poligon aparținînd unui plan α și un punct $V \notin \alpha$. Se numește *piramidă de vîrf V și bază S* reuniunea tuturor segmentelor $[VA]$, unde $A \in S$.

Se observă că piramida este o generalizare a tetraedrului.

Vom nota piramida de vîrf V și bază S prin $P = [VA_1A_2 \dots A_n]$. După numărul laturilor poligonului de bază, piramidele se vor numi: triunghiulare, patrulatere etc. (fig. VI.4). Suprafețele triunghiulare $[VA_1A_2]$, $[VA_2A_3]$, ..., $[VA_nA_1]$ și suprafața poligonală S se numesc *fețele piramidei*. Reuniunea fețelor unei piramide formează *suprafața* sau *frontiera piramidei*. Mulțimea punctelor piramidei care nu aparțin frontierei sale formează *interiorul piramidei*. Fețele $[VA_1A_2]$, $[VA_2A_3]$, ..., $[VA_nA_1]$ se mai numesc și *fețe laterale*. Segmentele $[VA_1]$, $[VA_2]$,..., $[VA_n]$, $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, ..., $[A_nA_1]$ se numesc *muchii*, iar dintre acestea, $[VA_1]$, $[VA_2]$, ..., $[VA_n]$ sînt *muchii laterale*. Punctele V, A_1, A_2, ..., A_n se numesc *vîrfuri*, iar A_1, A_2, ..., A_n se mai numesc și *vîrfurile bazei*. Distanța de la vîrful unei piramide la baza acesteia se numește *înălțimea piramidei*. Prin „înălțime" se va mai înțelege și segmentul determinat de vîrf și bază pe dreapta perpendiculară pe planul bazei, dusă prin V, iar în acest caz, intersecția acestei drepte cu planul bazei se numește *piciorul înălțimii*; sensul atribuit cuvîntului „înălțime" va rezulta din context. Piramida este determinată dacă sînt date vîrfurile ei.

Aria unei piramide este suma ariilor fețelor piramidei, iar *aria laterală a unei piramide* este suma ariilor fețelor laterale ale acesteia. Deci:

$$\boxed{\sigma_l(P) = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma[VA_iA_{i+1}] + \sigma[VA_nA_1]} \quad \text{și}$$

$$\boxed{\sigma_t(P) = \sigma_l(P) + B}, \quad B = \sigma(S).$$

Piramida de vîrf V și bază $S = [A_1A_2 \dots A_n]$ se numește *piramidă regulată* dacă $A_1A_2 \dots A_n$ este poligon regulat și piciorul înălțimii piramidei coincide cu centrul poligonului $A_1A_2 \dots A_n$. Înălțimea unei fețe laterale a unei piramide regulate se numește *apotema piramidei* (fig. VI.5). Tetraedrul

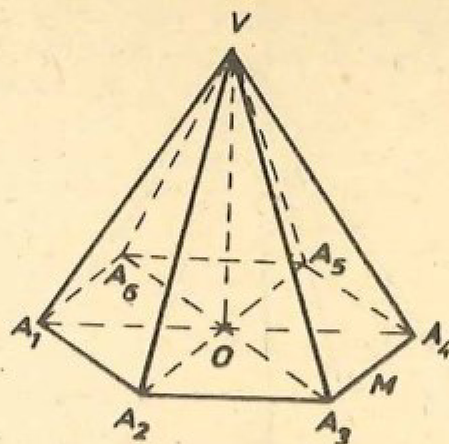


Fig. VI.5.

cu toate muchiile congruente se numeşte *tetraedru regulat*.

Dacă P este o piramidă regulată, feţele laterale sînt triunghiuri isoscele şi

$$\sigma_l(P) = \frac{\text{perimetrul bazei} \cdot \text{apotema}}{2}$$

Exerciţii

1. E posibil ca într-o piramidă cu muchiile laterale congruente, baza să fie: a) triunghi; b) dreptunghi; c) romb; d) trapez isoscel; e) trapez oarecare?

2. Să se arate că dacă muchiile laterale ale unei piramide sînt congruente, atunci poligonul de bază poate fi înscris într-un cerc cu centrul în piciorul înălţimii piramidei.

3. Să se formuleze şi să se demonstreze reciproca proprietăţii precedente.

4*. Să se arate că dacă feţele laterale ale unei piramide formează cu planul bazei unghiuri diedre congruente atunci poligonul de la bază poate fi circumscris unui cerc cu centrul în piciorul înălţimii.

5. O piramidă are ca bază un dreptunghi cu dimensiunile a şi b, înălţimea fiind h, iar piciorul înălţimii fiind centrul bazei. Să se calculeze aria laterală a piramidei.

6*. Fie $[SABCD]$ o piramidă cu baza $[ABCD]$, dreptunghi. Se proiectează A şi D pe muchiile $[SC]$ şi $[SB]$ respectiv în A' şi D'. Să se demonstreze că triunghiurile SBC şi $SA'D'$ sînt asemenea.

7. Baza unei piramide este un romb şi înălţimea piramidei trece prin punctul de intersecţie al diagonalelor bazei. Să se arate că feţele laterale ale piramidei sînt congruente.

8. Baza unei piramide este un triunghi dreptunghic şi muchiile laterale sînt congruente. Să se arate că planul uneia dintre feţele laterale este perpendicular pe planul bazei.

9*. Muchiile laterale ale unei piramide au lungimea 52. Baza este un triunghi cu laturile $20\sqrt{2}$, $20\sqrt{3}$ şi $10\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$. Să se afle: a) înălţimea piramidei; b) unghiul dintre muchiile laterale şi planul bazei; c) măsura unghiurilor diedre determinate de bază şi feţele laterale.

10*. Se ridică într-un punct al bazei unei piramide triunghiulare regulate o perpendiculară pe planul bazei ce intersectează planele feţelor laterale în trei puncte. Să se demonstreze că suma distanţelor acestor puncte la piciorul perpendicularei este constantă.

11. Să se afle muchia laterală şi aria laterală a unei piramide regulate cu lungimea laturii bazei a şi înălţimea h, dacă baza este: a) triunghiulară; b) patrulateră; c) hexagonală.

12. Să se afle înălţimea şi muchia laterală a unei piramide regulate cu lungimea laturii bazei a, şi apotema m, dacă baza este: a) triunghiulară; b) patrulateră; c) hexagonală.

13*. Se consideră piramidă hexagonală regulată $[VABCDEF]$ în care $VA = 10$ și înălțimea este 8. Să se afle: a) $\sigma(VAC)$; b) măsura unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei; c) măsura unghiului diedru dintre două fețe laterale alăturate.

14. Într-o piramidă patrulateră regulată $[VABCD]$ aria unei fețe laterale este q. Unghiul diedru dintre două fețe laterale alăturate are măsura $120°$. Să se afle $\sigma[VAC]$.

15. Se consideră piramida triunghiulară regulată $[VABC]$ în care latura bazei are lungimea a și muchiile laterale au lungimea b. Se consideră punctul $D \in (VA)$ astfel ca $DA = \frac{1}{4} \cdot VA$, punctul E mijlocul lui (VB) iar punctul $F \in (VC)$ astfel ca $VF = \lambda \cdot VC$. Să se determine λ în funcție de a și b astfel ca triunghiul DEF să fie dreptunghic în E.

16*. Să se calculeze măsura unghiului diedru dintre planele determinate de două fețe ale unui tetraedru regulat.

17*. Se consideră tetraedrul $[ABCD]$ în care $(AB) \equiv (AC) \equiv (AD)$. Să se arate că perpendiculara din A pe planul (BCD) trece prin centrul cercului circumscris triunghiului BCD.

18*. În tetraedrul $[ABCD]$, $AB \perp (BCD)$, $AB = a$, $BC = b$, $BD = c$, $DC = d$. Să se afle măsura unghiului diedru dintre planele (ADC) și (BDC).

19. Să se arate că într-un tetraedru regulat suma distanțelor de la centrul bazei la fețele laterale este egală cu înălțimea tetraedrului.

20. Să se afle distanța dintre centrele a două fețe ale unui tetraedru regulat de muchie a.

21. Să se calculeze măsura unghiului format de o muchie a unui tetraedru regulat cu una din fețele care nu o conține.

22. Se consideră tetraedrul $[SABC]$ ale cărei muchii $[SA]$, $[SB]$ și $[SC]$ sînt perpendiculare două cîte două. Să se calculeze lungimile muchiilor $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$ în funcție de lungimile a, b, c ale laturilor triunghiului ABC. Ce condiții satisfac lungimile a, b, c?

Secțiuni în piramidă

Se consideră o piramidă $P = [VA_1A_2 \ldots A_n]$ și un plan β. Dacă intersecția dintre piramidă și plan nu este vidă, atunci mulțimea $\beta \cap P$ se numește *secțiunea piramidei prin planul* β (fig. VI.6). Și în acest caz, un rol mai important îl au secțiunile prin plane paralele cu baza.

Proprietate 1. *Dacă înălțimea unei piramide P este I, atunci un plan paralel cu baza, situat în același semispațiu cu vîrful V față de planul bazei, la distanța I' de vîrf, $I' \leq I$, secționează piramida după o suprafață poligonală asemenea cu baza, raportul de asemănare fiind $\frac{I}{I'}$.*

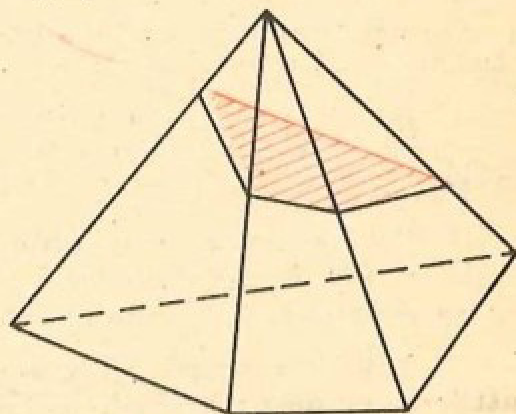


Fig. VI.6.

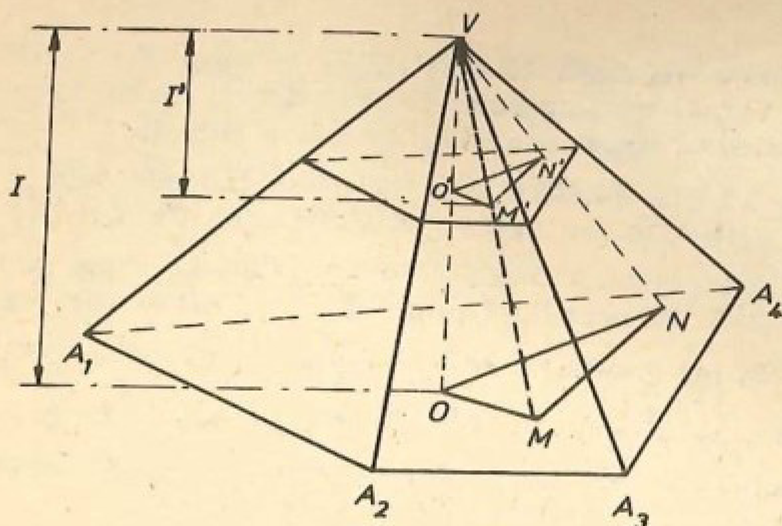


Fig. VI.7.

Demonstrație. Determinăm pe înălțimea $[VO]$ punctul O' astfel că $VO' = I'$ (fig. VI.7). Atunci $O' \in \beta$ și punctele V, O sînt de o parte și de alta a planului β. Fie S baza piramidei P și $S' = P \cap \beta$. Dacă M este un punct oarecare a lui S, V și M fiind de o parte și de alta a lui β, segmentul $[VM]$ intersectează planul β într-un punct M' și $M' \in P \cap \beta = S'$. Vom arăta că funcția $f : S \to S'$, $f(M) = M'$ este o asemănare de raport $\frac{I}{I'}$. Evident, f este injectivă și din definiția lui S' rezultă că e și surjectivă. Luînd punctele $M, N \in S$, avem $\triangle VMN \sim \triangle VM'N'$ și $\triangle VOM \sim \triangle V'O'M'$ (căci $MN \parallel M'N'$, $OM \parallel O'M'$), deci

$$\frac{MN}{M'N'} = \frac{VM}{VM'} = \frac{VO}{VO'} = \frac{I}{I'}.$$

Așadar $MN = \frac{I}{I'} \cdot f(M)f(N)$ și f este o asemănare.

Observații. 1) Mulțimea punctelor piramidei P situată în același semispațiu cu V față de planul β, reunită cu S' determină o piramidă P' de vîrf V și bază S'.

2) Dacă $I' = 0$, atunci intersecția dintre planul β și piramida P este un punct, vîrful V. Dacă $I' = I$, atunci intersecția este chiar baza S.

Exerciții

23. Într-o piramidă triunghiulară regulată se cunosc lungimile muchiilor bazei și a muchiilor laterale, respectiv a și b. Să se determine aria secțiunii duse printr-o muchie laterală și înălțimea piramidei.

24. Să se ducă un plan paralel cu baza unei piramide astfel ca aria laterală a piramidei formate să fie într-un raport dat, q, cu aria laterală a piramidei date.

25. Lungimea muchiilor unei piramide patrulatere regulate este a. Să se afle aria secțiunii prin planul determinat de mijloacele a două muchii alăturate ale bazei și mijlocul înălțimii.

26. Înălțimea unei piramide triunghiulare regulate este 8 și lungimea muchiei bazei este 2. Să se calculeze aria secțiunii cu un plan ce trece printr-o muchie a bazei și este perpendiculară pe muchia laterală opusă.

27. Un tetraedru regulat $[ABCD]$ este secționat cu planul paralel cu BD, care trece prin A și prin centrul feței $[BCD]$. Să se afle aria secțiunii dacă lungimea muchiei tetraedrului este 9.

28. Într-o piramidă patrulateră regulată, lungimea laturii bazei este a, iar a muchiei laterale b. Să se construiască secțiunea făcută printr-un plan care trece prin una din diagonalele bazei și este paralel cu o muchie laterală și să se calculeze aria acestei secțiuni.

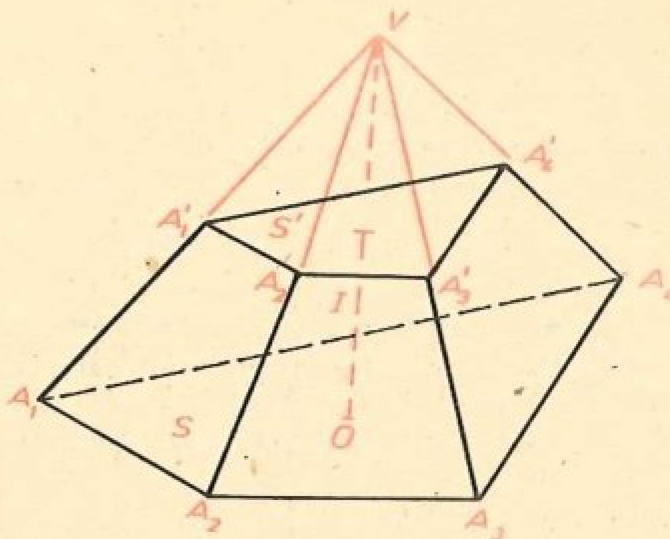


Fig. VI.8.

§ 3. Trunchiul de piramidă

Prin secționarea unei piramide P de vîrf V și bază S cu un plan β, paralel cu baza, se obțin două mulțimi situate în semispații opuse față de acest plan. Evident, una din aceste mulțimi este tot o piramidă, iar cealaltă se va numi *trunchi de piramidă* (fig. VI.8).

Suprafețele poligonale asemenea S și $S' = P \cap \beta$ se numesc *bazele* trunchiului de piramidă și mai exact *baza mare* respectiv *baza mică*. Analog cu noțiunile corespunzătoare de la prismă și piramidă se definesc fețele trunchiului de piramidă, fețele laterale, muchiile, muchiile laterale, vîrfurile, frontiera și interiorul, aria laterală și aria totală. *Înălțimea* unui trunchi de piramidă este distanța dintre planele bazelor sau segmentul determinat de baze pe perpendiculara comună acestora. Se va utiliza notația $T = [A_1A_2 \dots A_nA'_1A'_2 \dots A'_n]$ pentru trunchiul de piramidă de baze $S = [A_1A_2 \dots A_n]$ și $S' = [A'_1A'_2 \dots A'_n]$, punctele A_i, A'_i aparținînd aceleiași muchii laterale.

$$\boxed{\sigma_l(T) = \text{suma ariilor fețelor laterale}}$$

$$\boxed{\sigma_t(T) = \sigma_l(T) + B + b}\text{, unde } B = \sigma(S) \text{ și } b = \sigma(S').$$

Prin trunchi de piramidă triunghiulară, patrulateră etc., sau trunchi de piramidă regulată se înțelege un trunchi de piramidă obținut dintr-o piramidă corespunzătoare.

Înălțimea unei fețe laterale a unui trunchi de piramidă regulată se numește *apotema* trunchiului de piramidă. În cazul unui trunchi de piramidă regulată,

$$\boxed{\sigma_l(T) = \frac{(\text{perimetrul bazei mari} + \text{perimetrul bazei mici}) \cdot \text{apotema}}{2}}$$

Exerciţii

1. Să se arate că cele patru diagonale ale unui trunchi de piramidă, ale cărui baze sînt paralelograme, sînt concurente.

2. Muchiile laterale ale unui trunchi de piramidă patrulateră regulată formează cu planul bazei unghiuri de măsură $\alpha = \text{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$. Să se arate că două feţe laterale opuse sînt perpendiculare.

3. Într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată, diagonalele sînt perpendiculare două cîte două. Lungimile muchiilor bazelor sînt 20 respectiv 10. Să se determine înălţimea, lungimile diagonalelor, ale muchiilor laterale şi ale diagonalelor feţelor laterale.

4. Muchiile bazelor unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată sînt 2 şi 5 iar înălţimea de 1. Printr-un vîrf al bazei mici se duce un plan paralel cu faţa opusă. Să se afle aria secţiunii.

5. Un trunchi de piramidă regulată are ca baze două hexagoane regulate cu lungimile laturilor a şi b; lungimea muchiei laterale este c. Să se calculeze aria laterală a trunchiului.

6. Un trunchi de piramidă are ca baze două romburi cu lungimile laturilor 8 respectiv 6 şi cu cîte un unghi cu măsura 120°. Înălţimea trunchiului este egală cu triplul lungimii diagonalei mari a bazei mici. Să se calculeze înălţimea piramidei din care provine trunchiul.

§ 4. Mulţimi poliedrale

Mulţimile poliedrale constituie în spaţiu analogul suprafeţelor poligonale din plan, cu deosebirea că în acest caz suprafeţele poligonale convexe sînt înlocuite cu prisme, piramide şi trunchiuri de piramidă.

Definiţie. Se numeşte *mulţime poliedrală*, o mulţime de puncte din spaţiu care este reuniunea unui număr finit de prisme, piramide şi trunchiuri de piramidă, acestea avînd două cîte două interioarele disjuncte.

Şi în acest caz, dacă P este o mulţime poliedrală, iar $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sînt prismele, piramidele şi trunchiurile de piramidă respective, adică $P = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n$ şi $\text{Int } P_i \cap \text{Int } P_j = \varnothing$, $i \neq j$, atunci se va spune că *mulţimea P se descompune în mulţimile $P_1, P_2, \ldots, P_n$*.

Un punct O al mulţimii poliedrale P se numeşte *punct interior al lui P* dacă există un corp sferic cu centrul în O inclus în P. Punctele mulţimii P ce nu sînt interioare acesteia se numesc *puncte de frontieră*.

Exemple:

1) Punctele din interiorul unei prisme, piramide sau trunchi de piramidă sînt puncte interioare pentru aceste mulţimi. Într-adevăr, pentru un punct O din interiorul unei astfel de mulţimi se notează cu r numărul strict pozitiv mai mic decît toate distanţele de la O la feţele prismei, piramidei sau trunchiului de piramidă din care face parte. Atunci corpul sferic de centru O şi rază r este inclus în mulţimea respectivă.

2) Se consideră cubul $[ABCDA'B'C'D']$ şi piramida $[VBCC']$ unde $B \in (AV)$ (fig. VI.9). Pentru mulţimea poliedrală formată din reuniunea

cubului cu piramida, punctele interioare sînt punctele interioare ale cubului şi piramidei, plus punctele din Int BCC'.

În baza exemplului 1) putem defini *interiorul unei mulţimi poliedrale oarecare* P ca fiind mulţimea punctelor interioare ale lui P. Mulţimea punctelor de frontieră ale lui P se numeşte *frontiera lui* P.

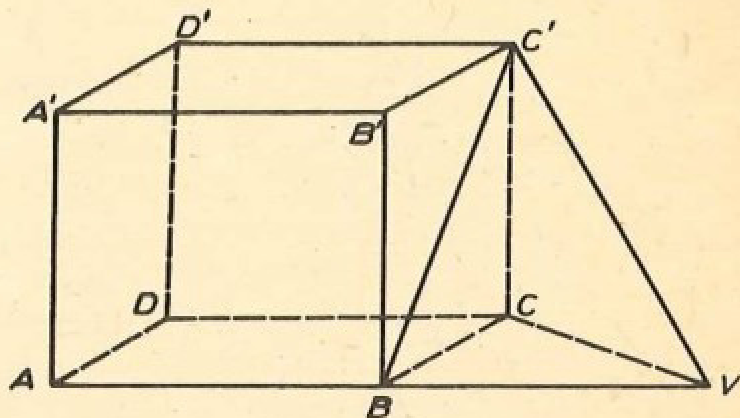


Fig. VI.9.

În continuare se va stabili o proprietate de descompunere a mulţimilor poliedrale. În plan, s-a arătat că orice suprafaţă poligonală se descompune în suprafeţe triunghiulare. În mod analog, în spaţiu este adevărată următoarea

Teorema 1. Orice mulţime poliedrală se poate descompune în tetraedre.

Demonstraţia rezultă din următoarele proprietăţi de descompunere a prismelor, piramidelor şi trunchiurilor de piramidă.

Proprietatea 1. *Orice prismă se descompune în prisme triunghiulare.*

Demonstraţie. Se consideră prisma P de baze S şi S'. Ştim că suprafaţa poligonală S se descompune în suprafeţele triunghiulare T_1, T_2, ..., T_m (vezi cap. I. § 1). Prismele determinate de bazele T_1, T_2, ..., T_m, planul bazei S' şi avînd muchiile laterale paralele cu muchiile laterale ale prismei P, au interioarele disjuncte şi reuniunea lor coincide cu P (fig. VI.10).

Proprietatea 2. *Orice prismă triunghiulară se descompune în trei tetraedre.*

Demonstraţie. Se consideră prisma $P = [ABCA'B'C']$ şi piramidele $P_1 = [A'ABC]$. $P_2 = [BB'CA']$ şi $P_3 = [B'C'A'C]$. Cele trei piramide au interioarele disjuncte deoarece oricare două au ca intersecţie o faţă sau o muchie, iar reuniunea lor este P (fig. VI.11), deci P se descompune în P_1, P_2, P_3.

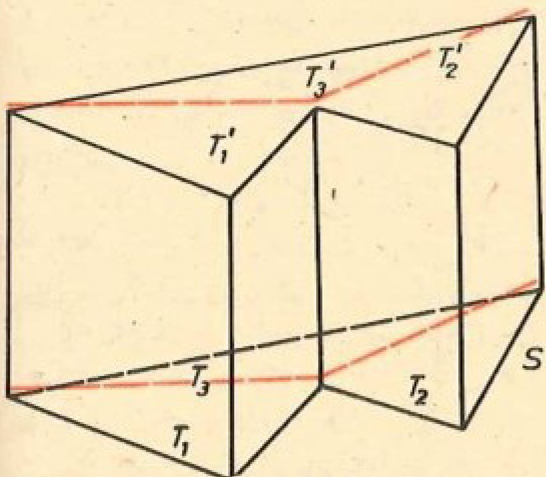


Fig. VI.10.

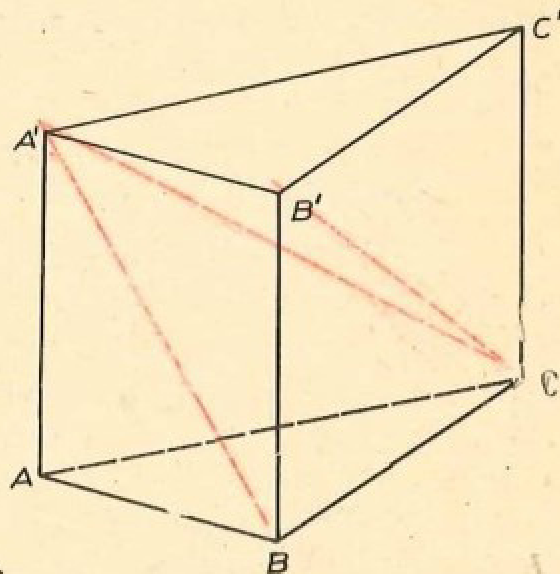


Fig. VI.11.

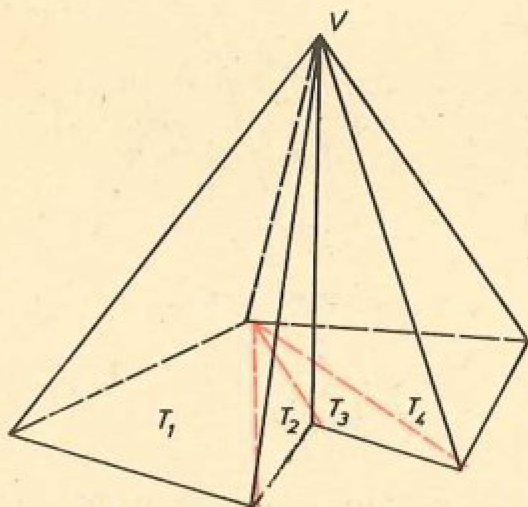


Fig. VI.12.

Proprietatea 3. *Orice piramidă se descompune în piramide triunghiulare.*

Demonstrație. Proprietatea rezultă din faptul că baza piramidei se descompune în suprafețe triunghiulare care împreună cu vîrful piramidei determină piramidele ce realizează descompunerea (fig. VI.12).

Proprietatea 4. *Orice trunchi de piramidă se descompune în trunchiuri de piramidă triunghiulară.*

Proprietatea este o consecință imediată a proprietății 3 (fig. VI.13).

Proprietatea 5. *Orice trunchi de piramidă triunghiulară se descompune în trei tetraedre.*

Descompunerea este analoagă celei din proprietatea 2 (fig. VI.14).

Vom admite următoarea proprietate: dacă două mulțimi poliedrale sînt congruente și una din ele este descompusă în tetraedrele $T_1, T_2, \ldots, T_n$, atunci și cealaltă poate fi descompusă în tetraedrele $T'_1, T'_2, \ldots, T'_n$ astfel ca $T_i \equiv T'_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Un corespondent în spațiu al suprafețelor poligonale cu frontiera poligon îl constituie poliedrele.

Definiție. O mulțime poliedrală P se numește *poliedru* dacă are următoarele proprietăți:

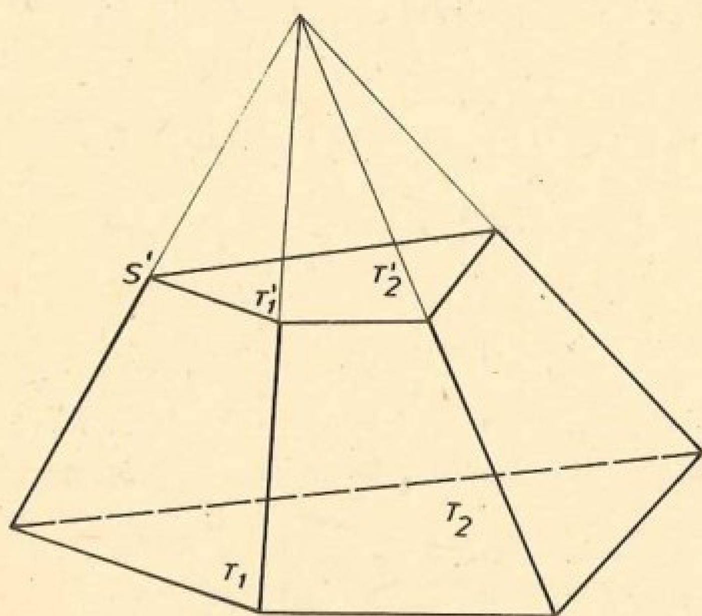


Fig. VI.13.

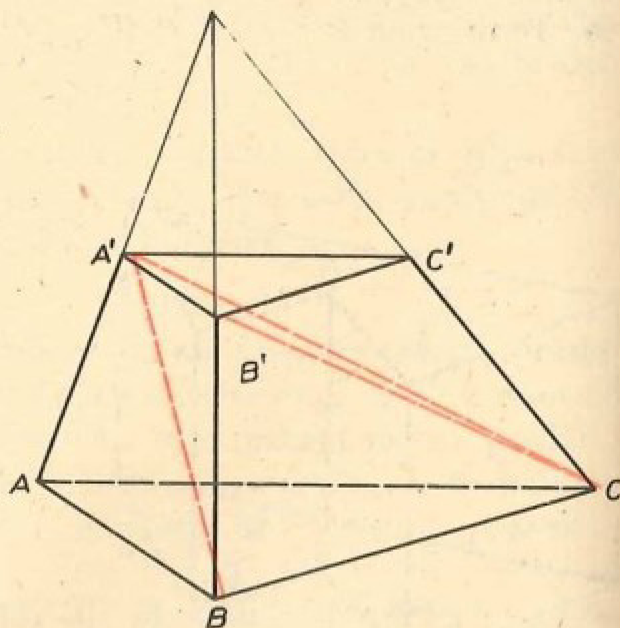


Fig. VI.14.

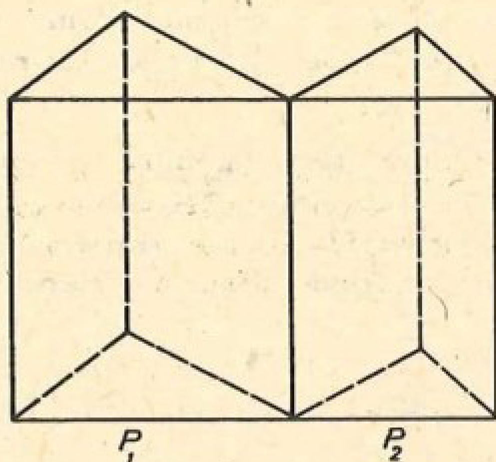


Fig. VI.15.

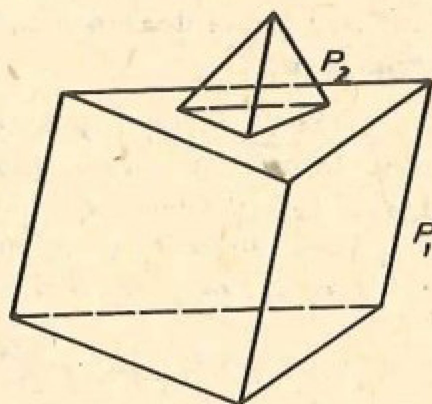


Fig. VI.16.

1) pentru oricare două puncte interioare ale lui P există o linie poligonală cu extremitățile în cele două puncte, formată numai din puncte interioare;

2) pentru oricare două puncte care nu aparțin lui P există o linie poligonală cu extremitățile în cele două puncte, formată numai din puncte care nu aparțin lui P.

Exemple:

1) Reuniunea a două prisme care au ca intersecție o muchie nu este poliedru (fig. VI.15).

2) Reuniunea dintre o prismă și o piramidă care au ca intersecție o suprafață poligonală este un poliedru (fig. VI.16).

3) Se consideră cubul $[ABCDA'B'C'D']$ de latură a și O centrul său (intersecția diagonalelor). Piramidele cu vîrful în O și baze fețele cubului se secționează cu plane paralele cu bazele situate la distanța $\frac{a}{4}$ de baze. Reuniunea trunchiurilor de piramidă astfel formate nu este poliedru (fig. VI.17).

Se numește *vîrf al unui poliedru*, un punct care aparține frontierei poliedrului și nu aparține nici unui segment deschis inclus în frontieră. Se numește *muchie a unui poliedru* un segment determinat de două vîrfuri ale poliedrului, inclus în frontieră și ale cărui puncte nu aparțin interiorului nici unei suprafețe poligonale inclusă în frontieră.

Un poliedru se numește *convex* dacă este o mulțime convexă. Acceptăm, în mod intuitiv, că în cazul unui poliedru convex, frontiera este o reuniune de suprafețe poligonale convexe a căror laturi sînt muchii ale poliedrului. O astfel de suprafață poligonală convexă se numește *față a poliedrului*.

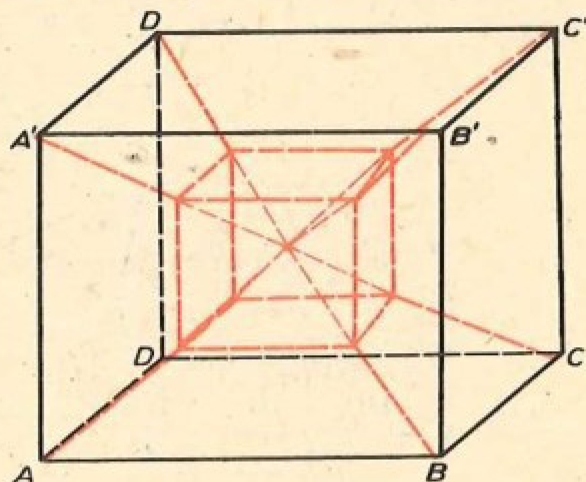


Fig. VI.17.

În continuare, vom demonstra o relaţie importantă care există între numărul vîrfurilor, muchiilor şi feţelor unui poliedru convex oarecare. Ca pregătire, dăm un rezultat din geometria plană.

Definiţie. Se numeşte *reţea poligonală simplă* o suprafaţă poligonală $[P]$ cu frontiera poligon împreună cu o descompunere a ei în suprafeţe poligonale convexe, $[P] = [P_1] \cup \ldots \cup [P_f]$. Cele f suprafeţe $[P_i]$ se numesc *feţele* reţelei, iar vîrfurile şi laturile acestora se numesc *vîrfurile* şi *muchiile* reţelei, numărul lor fiind notat cu v respectiv m. Pe fig. VI.18 $v = 11$, $m = 16$, $f = 6$.

Teorema 1. În orice reţea poligonală simplă avem

$$v - m + f = 1.$$

Demonstraţie. Dacă P_i are 4 laturi sau mai multe, ducînd o diagonală a lui P_i, se obţine o reţea nouă, în care numărul vîrfurilor este tot v, există o muchie în plus şi o faţă în plus, deci numărul $v - m + f$ nu s-a modificat. Aşadar, dacă descompunem fiecare $[P_i]$ în suprafeţe triunghiulare (în conformitate cu teorema de descompunere de la Cap. I, § 1), se obţine o reţea pentru care $v - m + f$ rămîne acelaşi. Prin urmare este suficient să demonstrăm teorema pentru cazul cînd fiecare P_i este triunghi.

Procedăm prin inducţie matematică în raport cu f. Dacă $f = 1$, avem un singur triunghi, $v = 3$, $m = 3$ şi $v - m + f = 1$. Presupunem că teorema este adevărată pentru fiecare reţea în care numărul feţelor este mai mic decît f. Considerăm o suprafaţă triunghiulară $[ABC]$ a reţelei avînd latura $[AB]$ în comun cu P şi deosebim două cazuri: a) C este un punct interior al lui $[P]$ (fig. VI.18); scoţînd din reţea Int $ABC \cup (AB)$, se obţine o reţea simplă cu $f - 1$ feţe, v vîrfuri şi $m - 1$ muchii; în virtutea ipotezei de inducţie $v - (m - 1) + f - 1 = 1$, deci $v - m + f = 1$. b) $C \in P$ (fig. VI.19), atunci $[AC]$ (sau $[BC]$) descompune reţeaua $[P]$ în reţelele poligonale simple $[P']$ şi $[P'']$ cu v', m', f' respectiv v'', m'', f'' vîrfuri, muchii şi feţe, pentru care $v' - m' + f' = 1$, $v'' - m'' + f'' = 1$. Deoarece $v' + v'' = v + 2$, $m' + m'' = m + 1$, $f' + f'' = f$, rezultă $v + 2 - (m + 1) + f = 2$, deci iarăşi $v - m + f = 1$.

Teorema 2. (Relaţia lui Euler.) Dacă v, m, f reprezintă respectiv numărul vîrfurilor, muchiilor şi feţelor unui poliedru convex, atunci

$$v - m + f = 2.$$

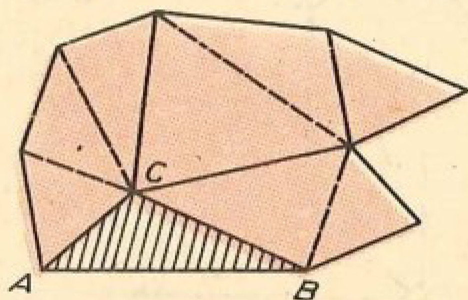


Fig. VI.18.

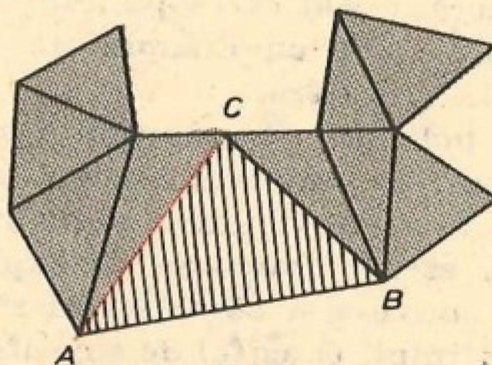


Fig. VI.19.

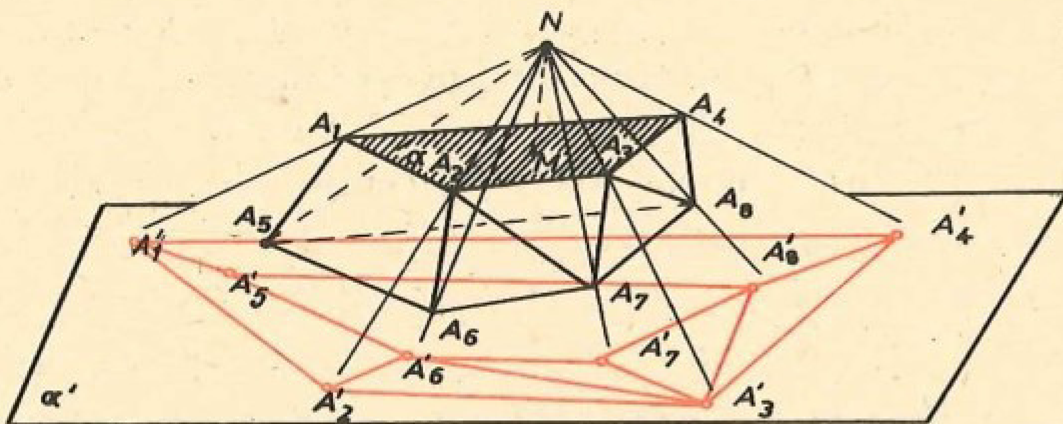


Fig. VI.20.

Demonstrație. Fie $P = [A_1A_2...A_v]$ un poliedru convex oarecare, $L = [A_1A_2...A_k]$ o față a lui P, α planul lui L, iar α' un plan paralel cu α astfel ca poliedrul P să fie situat între α și α' (fig. VI.20). Luăm un punct $M \in \text{int } L$ și o dreaptă $MN \perp \alpha$, N și Int P fiind de o parte și de alta a lui α. Notînd $A'_i = \alpha' \cap NA_i$, $i \in \{1, ..., v\}$ $A'_1A'_2...A'_k$ este un poligon convex asemenea cu $A_1A_2...A_k$ (§ 2, proprietatea 2) și dacă N este suficient de aproape de M, punctele $A'_{k+1}, ..., A'_v$ se află în interiorul lui $A'_1A'_2 ... A'_k$. Prin urmare punctele $A'_1 ..., A'_v$ sînt vîrfurile unei rețele poligonale simple avînd v vîrfuri, m muchii și $f - 1$ fețe. Din teorema 1 rezultă că $v - m + f - 1 = 1$ și relația este demonstrată.

Observație. Dacă se suprimă fața L, se obține o „rețea spațială simplă“ R, așezată pe suprafața poliedrului P. Acesteia i-am asociat, prin „proiectare din N“ o rețea poligonală simplă în planul α'. Bazîndu-ne pe intuiție (sau pe experiență), putem să obținem asocierea respectivă și în alt mod. Să ne imaginăm că rețeaua R este realizată dintr-o membrană elastică, pe care o întindem pînă ce devine plană. Ea se deformează și muchiile devin arce de curbe, dar acestea pot fi înlocuite cu segmente de drepte, fără a schimba numerele v, m și $f - 1$ și teorema 2 rezultă din teorema 1.

Acest procedeu poate fi aplicat ori de cîte ori rețeaua spațială (presupusă elastică) poate fi întinsă astfel încît să devină plană. Rezultă că relația lui Euler este valabilă și pentru alte tipuri de poliedre, nu numai pentru cele convexe, de exemplu în cazul figurii VI.21, unde $v = 9$, $m = 16$, $f = 9$ și $v - m + f = 2$. Dacă îndepărtăm o față a poliedrului de pe fig. VI.22, de formă inelară, rețeaua fețelor rămase nu se mai poate întinde pe un plan; aici $v = 16$, $m = 32$, $f = 16$ și $v - m + f = 0 \neq 2$. Dacă un corp este străpuns de p ori, zicem că suprafața lui este de „gen p“ și în acest caz $v - m + f = 2 - 2p$. Numărul $v - m + f$ se numește *caracteristica euleriană* a suprafeței respective. Suprafața unui poliedru convex este de gen 0 și are caracteristica euleriană egală cu 2.

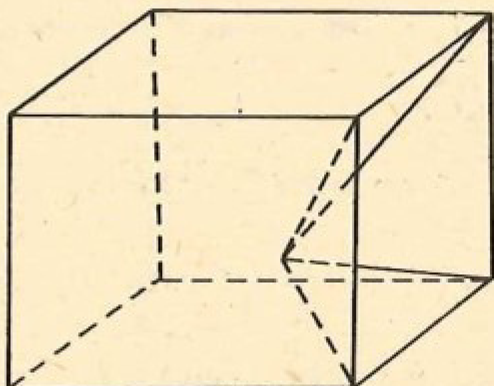


Fig. VI.21.

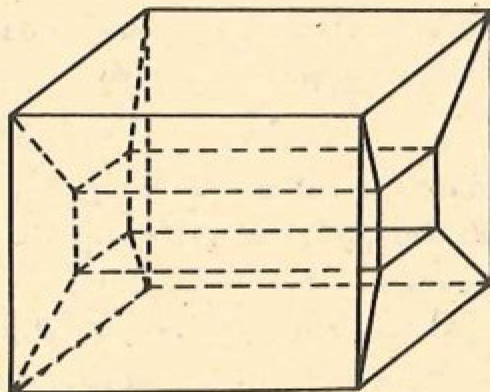


Fig. VI.22.

Definiție. Un poliedru convex P se numește *poliedru regulat* dacă fiecare vîrf al lui P aparține aceluiași număr de muchii, toate fețele sînt suprafețe poligonale regulate congruente și toate unghiurile diedre, determinate de fețe cu muchie comună, sînt congruente.

Teorema 3. Există numai cinci tipuri de poliedre regulate și anume: tetraedrul, hexaedrul (cubul), octaedrul, dodecaedrul și icosaedrul regulat (fig. VI.23—VI.27).

Demonstrație. Notăm prin q numărul muchiilor de pe o față și cu p numărul muchiilor care pleacă dintr-un vîrf. Cum fiecare muchie este inclusă în exact două fețe și are două extremități rezultă că

$$2m = f \cdot q = v \cdot p,$$

adică

$$v = \frac{2m}{p} \text{ și } f = \frac{2m}{q}. \tag{1}$$

Ținînd cont de relația lui Euler,

$$\frac{2m}{p} - m + \frac{2m}{q} = 2$$

sau

$$m\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right) = 1. \tag{2}$$

Rezultă că

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} > 0, \tag{3}$$

de unde

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{2} - \frac{1}{q} \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

deci $p < 6$ și analog $q < 6$; iar dacă $p \geqslant 4$, atunci $q < 4$. Deci singurele perechi (p, q) care verifică inegalitatea (3) sînt

$$(3,3),\ (3,4),\ (3,5),\ (4,3),\ (5,3). \tag{4}$$

Rezultă că există cel puțin 5 tipuri de poliedre regulate. Vom arăta în continuare că pentru fiecare pereche din șirul (4) există un poliedru regulat.

1) Cazul $p = 3, q = 3$. Atunci din (2) obținem $m = 6$ și din (1) aflăm $v = 3, f = 3$. Poliedrul este un *tetraedru regulat* (fig. VI.23).

2) Cazul $p = 3, q = 4$; atunci $m = 12, v = 8, f = 6$ și se obține un *cub* (sau *hexaedru regulat*) (fig. VI.24).

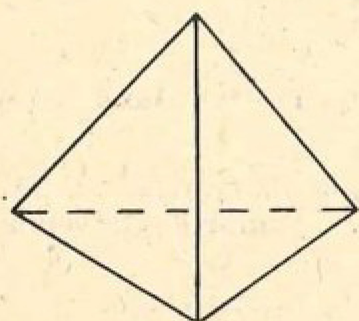


Fig. VI.23.

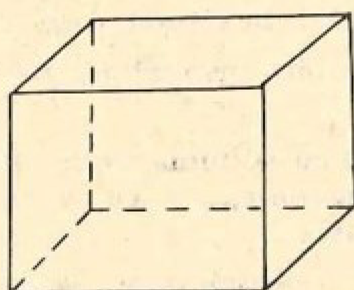


Fig. VI.24.

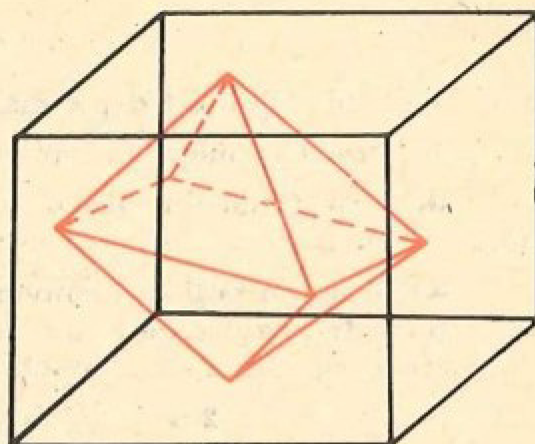
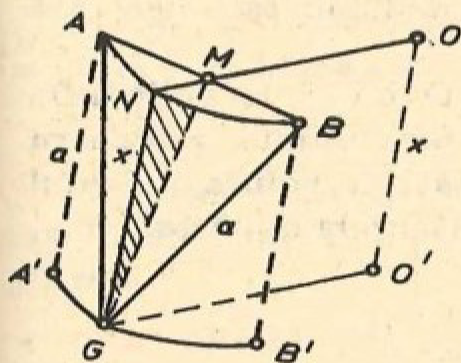


Fig. VI.25.

3) Cazul $p = 4$, $q = 3$; atunci $m = 12$, $v = 6$, $f = 8$. Acest poliedru poate fi realizat luînd ca vîrfuri centrele fețelor unui cub (fig. VI.25). El se numește *octaedru regulat*.

4) Cazul $p = 5$, $q = 3$; atunci $m = 30$, $v = 12$, $f = 20$. Se construiește un poliedru regulat în modul următor: se consideră într-un plan α un pentagon regulat $ABCDE$, de centru O și latură a (fig. VI.26). Pe dreapta dusă prin O, perpendicular pe α, se ia un punct F astfel ca $AF = a$. Atunci triunghiurile FAB, FBC, FCD, FDE și FEA sînt echilaterale. Se ia un punct O' pe semidreapta opusă lui $(OF$, se duce planul α' prin O', paralel cu α și se proiectează punctele A, B pe α' în A', B'. Înscriem în cercul $\mathcal{C}(O', OA)$, situat în α', un pentagon regulat $GHIJK$ astfel încît G să fie mijlocul arcului mic $\widehat{A'B'}$ (fig. VI.26, *a*). Determinăm distanța $x = OO'$ în așa fel încît $AG = a$; notăm în acest scop cu M mijlocul segmentului $[AB]$ și cu N mijlocul arcului mic $\widehat{AB}$ al cercului circumscris lui $ABCDE$; rezultă $x^2 = NG^2 = MG^2 - MN^2 = \frac{3a^2}{2} - MN^2$. Atunci, între planele α și α' se formează zece triunghiuri echilaterale: ABG, BCH, CDI DEJ, EAK, GHB, HIC, IJD, JKE, KGA. În sfîrșit, luînd pe semidreapta opusă lui $(O'F$ punctul L pentru care $O'L = OF$ se obțin alte cinci triunghiuri echilaterale de latură a: GHL, HIL, IJL, JKL, KGL și $[FABCDEGHIJKL]$ este un poliedru regulat cu 20 fețe, numit *icosaedru regulat*.

5) *Cazul* $p = 3$, $q = 5$; atunci $m = 30$, $v = 20$, $f = 12$. Se vede ușor că centrele fețelor unui icosaedru regulat formează vîrfurile unui poliedru regulat cu 12 fețe, numit *dodecaedru regulat* (fig. VI.27).



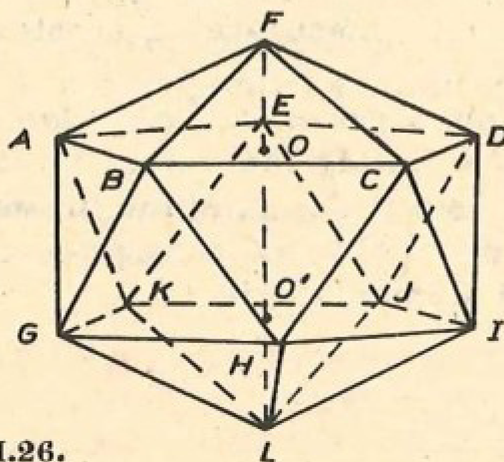


Fig. VI.26.

Fig. VI.27.

Exerciţii

1. Descompuneţi o prismă pentagonală în tetraedre.

2. Descompuneţi un trunchi de piramidă hexagonală în piramide.

3. Arătaţi că un cub poate fi descompus prin plane paralele cu feţele lui în trei paralelipipede congruente şi două cuburi.

4*. Într-un poliedru convex se notează cu m numărul muchiilor, cu $f_3, f_4, f_5, \ldots$ numărul feţelor triunghiulare, patrulatere, pentagonale,... şi cu $v_3, v_4, v_5, \ldots$ numărul vîrfurilor din care pleacă 3, 4, 5,... muchii. Să se arate:

$$2m = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots = 3v_3 + 4v_4 + 5v_5 + \ldots$$

5*. Să se arate că în orice poliedru convex avem

$$m + 6 \leqslant 3f \leqslant 2m,$$
$$m + 6 \leqslant 3v \leqslant 2m.$$

6*. Dacă din fiecare vîrf al unui poliedru convex pleacă cel puţin patru muchii, atunci poliedrul are feţe triunghiulare.

7*. Adunînd măsurile unghiurilor tuturor feţelor unui poliedru convex, se obţine dublul sumei măsurilor unghiurilor unui poligon convex avînd acelaşi număr de vîrfuri.

8*. Arătaţi că dacă un punct variază în interiorul unui poliedru regulat, suma distanţelor sale la planele feţelor rămîne constantă.

9*. Să se arate că centrele feţelor $[ABCD]$, $[ABB'A']$, $[CBB'C']$ ale unui cub $[ABCDA'B'C'D']$ şi punctul A se află într-un acelaşi plan. Să se deducă de aici că un unghi diedru al octaedrului regulat şi cel al tetraedrului regulat sînt suplementare.

§ 5. Volumul mulţimilor poliedrale

Problema comparării anumitor mulţimi de puncte din spaţiu, care uneori vor fi numite şi corpuri, face necesară introducerea noţiunii de volum. Se va defini, deci, o funcţie prin care anumitor corpuri li se ataşează un număr real pozitiv, numit volumul corpurilor respective. Definirea unei astfel de funcţii este analoagă celei de arie. În acest paragraf se va defini funcţia volum pe *mulţimea $\mathcal{P}$, ale cărei elemente sînt mulţimile poliedrale din spaţiu.* Deoarece şi în acest caz se face de fapt o „măsurare" a acestor mulţimi este necesară introducerea unei unităţi.

Un cub de latură 1 se numeşte *unitate de volum.* O mulţime poliedrală care poate fi descompusă în n unităţi de volum va avea volumul n. Pentru mulţimile poliedrale care nu se pot descompune în unităţi de volum, calculul volumului nu se poate face direct şi se va baza pe următoarele două teoreme, pe care le vom admite fără demonstraţie.

Teorema 1. (Teorema de existenţă a funcţiei volum.) Există o funcţie $v : \mathcal{P} \to \mathbf{R}_+$, care verifică următoarele proprietăţi: (1) dacă tetraedrele T_1 şi T_2 sînt congruente, atunci $v(T_1) = v(T_2)$;

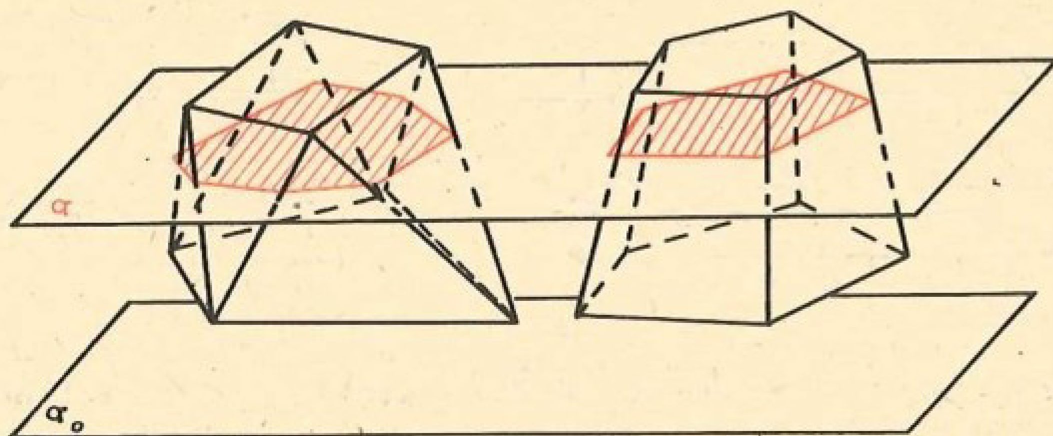


Fig. VI.28.

(2) dacă P_1 şi P_2 sînt mulţimi poliedrale cu interioarele disjuncte, atunci $v(P_1 \cup P_2) = v(P_1) + v(P_2)$;
(3) dacă U este o unitate de volum, atunci $v(U) = 1$.

Teorema 2. (Principiul lui Cavalieri.) Fie P_1 şi P_2 două mulţimi poliedrale şi α_0 un plan. Dacă pentru orice plan $\alpha \parallel \alpha_0$, mulţimile $\alpha \cap P_1$ şi $\alpha \cap P_2$ au arii egale atunci $v(P_1) = v(P_2)$ (fig. VI.28).

Observaţii:

1) Din proprietăţile exprimate în teoremele 1 şi 2 vom deduce formula pentru calculul volumului unui tetraedru şi deoarece orice mulţime poliedrală se descompune în tetraedre, va rezulta că funcţia v este determinată în mod unic prin teoremele 1 şi 2. De asemenea, rezultă că două mulţimi poliedrale congruente au volumele egale.

2) În condiţia (3) din teorema 1 intervine cubul de latură 1 considerat ca unitate de volum. Acesta este determinat deoarece distanţa 1 este fixată. În practică, există însă diferite unităţi de măsurare a distanţelor: 1 cm, 1 dm, 1 m etc. şi acestora le vor corespunde unităţi de volum de dimensiuni corespunzătoare: 1 cm³, 1 dm³, 1 m³ etc. Se obţin în acest fel mai multe funcţii volum şi în acest caz, ca şi în cazul ariilor, se va indica funcţia respectivă printr-un indice, de ex: v_{cm^3} şi în loc de $v_{cm^3}(P) = a$ se va scrie $v(P) = a$ cm³.

3) În ipoteza teoremei 2 se poate admite şi că ambele mulţimi $\alpha \cap P_1$ şi $\alpha \cap P_2$ se reduc la un segment, la un punct sau la mulţimea vidă („au arie nulă").

Teoremele care urmează vor determina modul de calcul al valorilor funcţiei volum (sau a volumelor) pentru anumite poliedre.

Teorema 3. Dacă P este un cub cu latura a atunci $v(P) = a^3$.

Demonstraţia parcurge aceleaşi etape este analoagă cu aceea a teoremei 2 din Cap. I. § 3, pentru demonstrarea formulei de calcul a ariei unui pătrat.

Consecinţă. *Dacă* $P = [ABCDA'B'C'D']$ *este un paralelipiped dreptunghic de dimensiuni:* $AA' = a$, $AB = b$, $BC = \frac{a^2}{b}$, *atunci* $v(P) = a^3$.

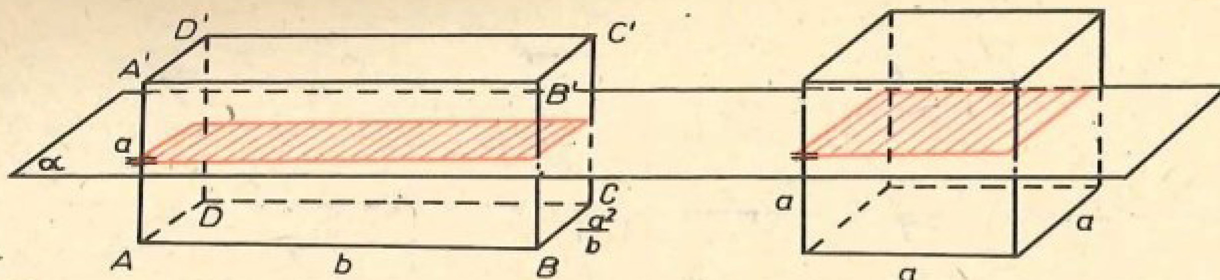


Fig. VI.29.

Demonstrație. Se construiește cubul P' de latură a, cu una din baze situate în planul $(ABCD)$ și situat în același semispațiu cu paralelipipedul față de acest plan (fig. VI.29). Secțiunile paralelipipedului și cubului prin plane paralele cu planul $(ABCD)$ sînt respectiv un dreptunghi și un pătrat care au aceeași arie (egală cu a^2). Deci, conform teoremei 2, $v(P) = v(P') = a^3$.

Observație. $v(P) = a^3 = a \cdot b \cdot \frac{a^2}{b} = AA' \cdot AB \cdot BC$.

Teorema 4. Fie P o prismă cu aria bazei B și de înălțime I; atunci

$$\text{vol. prismei} = B \cdot I$$

Demonstrație. Se construiește paralelipipedul dreptunghic $P' = [ABCDA'B'C'D']$ cu una din baze în planul bazei prismei P, situat în același semispațiu cu P față de acest plan (fig. VI.30) și avînd dimensiunile: $AA' = I$, $AB = x$, $BC = \frac{x^2}{I}$, unde $x = \sqrt[3]{B \cdot I}$; aria bazei lui P' este egală cu $x \cdot \frac{x^2}{I} = \frac{x^3}{I} = B$. Secțiunile prismei P și paralelipipedului P' prin plane paralele cu planul bazei au arii egale cu B, deoarece ele sînt suprafețe poligonale congruente respectiv cu baza fiecărei prisme. Din consecința teoremei 3 rezultă că $v(P') = x^3 = B \cdot I$, iar din teorema 2 rezultă că $v(P) = v(P') = B \cdot I$.

În cazul particular al unui paralelipiped dreptunghic P de dimensiuni a, b, c, $v(P) = a \cdot b \cdot c$.

Teorema 5. Două piramide triunghiulare cu bazele de arii egale și înălțimile egale au volume egale.

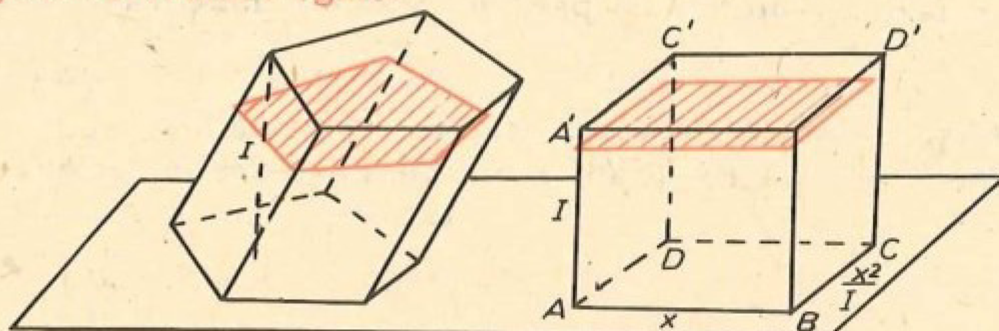


Fig. VI.30.

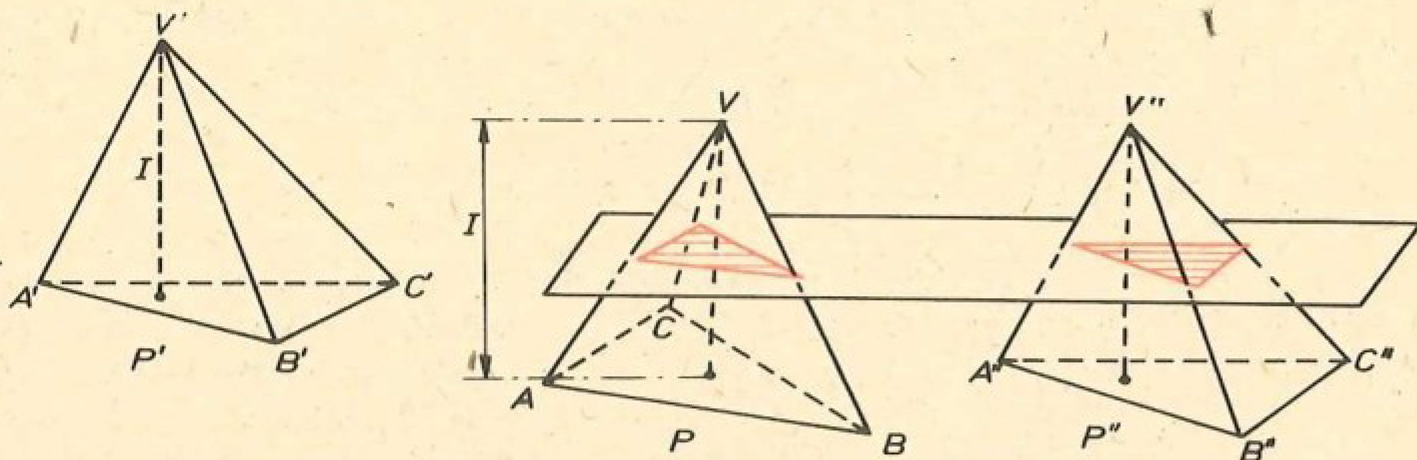


Fig. VI.31.

Demonstrație. Fie piramidele $P = [VABC]$ și $P' = [V'A'B'C']$, $\alpha = (ABC)$, $\alpha' = (A'B'C')$, $\sigma[ABC] = \sigma[A'B'C'] = B$ și $d(V, \alpha) = d(V', \alpha') = I$. În semispațiul limitat de α și care conține punctul V se construiește piramida $P'' = [V''A''B''C'']$ cu baza în planul α și astfel încît $P' \equiv P''$ (fig. VI.31). Se va arăta că pentru piramidele P și P'' sînt verificate condițiile din teorema 2. Deoarece cele două piramide au aceeași înălțime și ariile bazelor egale, rezultă că aria secțiunii printr-un plan paralel cu baza, la distanța I' de vîrf este aceeași în ambele piramide și egală cu $B \cdot \left(\frac{I'}{I}\right)^2$(vezi § 2, proprietatea 1). Deci $v(P) = v(P'') = v(P')$.

Teorema 6. Volumul unei piramide triunghiulare $P = [VABC]$ de înălțime I, bază $[ABC]$ și $B = \sigma[ABC]$ este

$$v(P) = \frac{1}{3} B \cdot I$$

Demonstrație. Se completează piramida P la prisma $P' = [ABCA'VC']$ construind A', C' în același semispațiu cu V față de planul (ABC) și astfel încît $AA' \parallel BV \parallel CC'$, $(AA') \equiv (BV) \equiv (CC')$ (fig. VI.32). Prisma P' se descompune în tetraedrele: $[VABC]$, $[CA'VC']$, $[ACVA']$. Tetraedrele $[VABC]$ și $[CA'VC']$ au baze congruente și înălțimi egale, deci au același volum: la fel tetraedrele $[CAVB] = [VABC]$ și $[CVAA'] = [ACVA']$ au bazele $[AVB] \equiv [VAA']$ și deoarece au vîrful comun C au și aceeași înălțime; deci $v(P') = B \cdot I = 3v(P)$ adică $v(P) = \frac{1}{3} B \cdot I$.

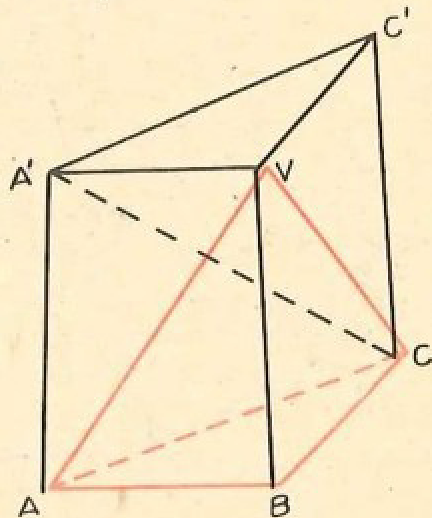


Fig. VI.32.

Consecință. Volumul piramidei $P = [VA_1A_2...A_n]$ este

$$\text{vol. piramidei} = \frac{1}{3} B \cdot I$$

unde $B = \sigma[A_1A_2...A_n]$, iar I este înălțimea piramidei.

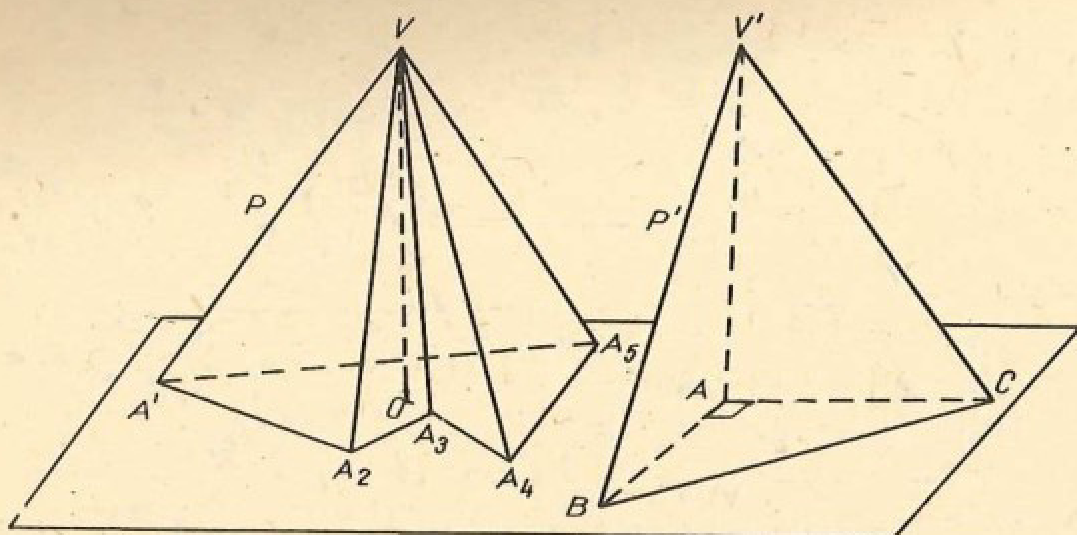


Fig. VI.33.

Demonstrație. Se construiește tetraedrul $P' = [V'ABC]$ de înălțime $VA = I$ și bază triunghiul dreptunghic isoscel $(m(\hat{A}) = 90°)$ de catetă $l = \sqrt{2B}$, triunghiul ABC fiind în același plan cu baza piramidei P, iar V' în același semispațiu cu V față de planul bazei piramidei (fig. VI.33). Piramidele P și P' verifică condițiile teoremei 2, deci $v(P) = v(P') = \frac{1}{3}\sigma[ABC] \cdot I = \frac{1}{3} \cdot \frac{l^2}{2} \cdot I = \frac{1}{3} \cdot B \cdot I$.

Teorema 7. Volumul trunchiului de piramidă $T = [A_1A_2 \ldots A_nA'_1A'_2 \ldots A'_n]$ este

$$\text{vol. tr. piramidă} = \frac{1}{3} \cdot I(B + b + \sqrt{B \cdot b})$$

unde I este înălțimea trunchiului de piramidă, iar $B = \sigma[A_1A_2 \ldots A_n]$ și $b = \sigma[A'_1A'_2 \ldots A'_n]$.

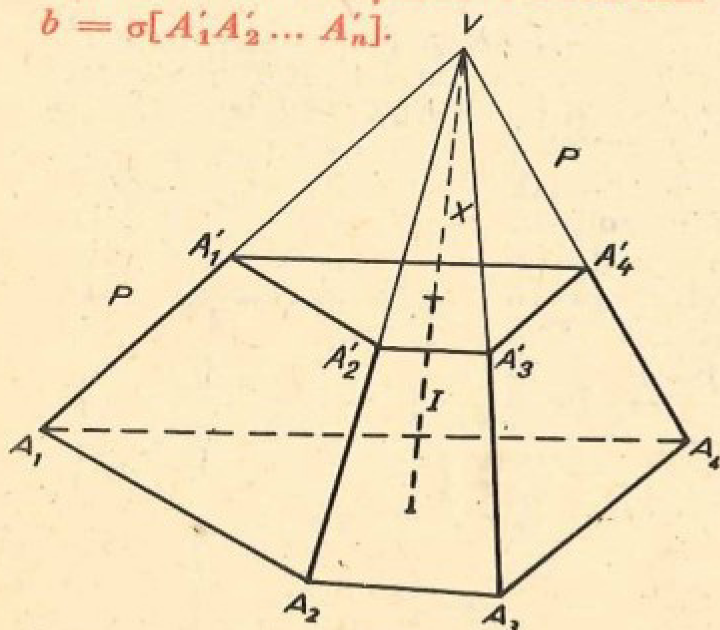


Fig. VI.34.

Demonstrație. Fie V vîrful piramidei $P = [VA_1A_2 \ldots A_n]$ din care s-a obținut trunchiul T și piramida $P' = [VA'_1A'_2 \ldots A'_n]$, x fiind înălțimea piramidei P' (fig. VI.34). Atunci $P = T \cup P'$ și

(1) $$v(T) = v(P) - v(P').$$

Dar $v(P) = \frac{1}{3}B(I + x)$, $v(P') = \frac{1}{3}b \cdot x$ și $\frac{b}{B} = \left(\frac{x}{x + I}\right)^2$ de unde rezultă că

(2) $$x = \frac{I(b + \sqrt{B \cdot b})}{B - b}.$$

Înlocuind expresia lui x din formula (2) în formula (1) se obţine:

$$v(T) = \frac{1}{3}(B \cdot I + B \cdot x - b \cdot x) = \frac{1}{3}[B \cdot I + x(B - b)] =$$

$$= \frac{1}{3}[B \cdot I + I(b + \sqrt{B \cdot b})] = \frac{1}{3} \cdot I(B + b + \sqrt{B \cdot b}).$$

În stabilirea formulelor de calcul a volumelor se poate observa o oarecare analogie cu ariile, dar se constată totuşi că pentru volume s-a folosit în plus şi teorema lui Cavalieri. Se pune în mod firesc întrebarea dacă nu s-ar putea renunţa la această teoremă şi să se procedeze la fel ca la arii, utilizînd numai teorema 1 şi proprietăţile de descompunere. În cazul plan, trecerea de la dreptunghi la triunghi se face simplu, observînd că o suprafaţă dreptunghiulară se descompune în două suprafeţe triunghiulare congruente, pe cînd în spaţiu, o prismă triunghiulară dreaptă nu se poate descompune în trei tetraedre congruente. Menţionăm că formulele pentru volumul cubului, paralelipipedului dreptunghic şi a prismei drepte se pot obţine fără a utiliza teorema lui Cavalieri (aceasta poate constitui un exerciţiu facultativ), însă formulele pentru tetraedru şi prisma oblică nu. Stabilirea riguroasă a formulelor respective nu este posibilă cu cunoştinţele clasei a X-a, iar utilizarea teoremei lui Cavalieri are avantajul că permite obţinerea cu uşurinţă a acestor formule, precum şi a altora care vor fi întîlnite în capitolul VII.

Exerciţii

1. Baza unui paralelipiped drept este un romb cu latura de lungime a şi un unghi de măsură 60°. Aria laterală a paralelipipedului este $8a^2$. Să se afle volumul paralelipipedului.

2. Baza unui paralelipiped drept este un paralelogram cu laturile de lungime a şi $4a$, iar unghiul ascuţit al paralelogramului are măsura 60°. Să se afle volumul paralelipipedului ştiind că cea mai lungă diagonală a lui are lungimea $5a$.

3*. Un plan α, perpendicular pe muchiile prismei $P = [A_1A_2 \dots A_nA_1' \dots A_n']$ intersectează suporturile muchiilor în $B_1, B_2, \dots, B_n$. Dacă $S = \sigma[B_1, B_2, \dots, B_n]$ şi l este lungimea unei muchii, să se arate că $v(P) = S \cdot l$.

4. Într-un paralelipiped două feţe laterale au ariile S_1 şi S_2 şi formează un unghi de măsură 150°. Să se afle volumul paralelipipedului dacă muchia laterală este de lungime l.

5. Se consideră o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei de lungime 10 şi înălţimea 12. Să se calculeze:

a) aria laterală şi volumul piramidei;

b) distanţele de la centrul bazei la muchia laterală, respectiv la feţele laterale ale piramidei.

6. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari $AB = 3a$, latura bazei mici $A'B' = a$ şi muchia laterală $AA' = 2a$. Să se calculeze volumul şi aria trunchiului.

7*. Să se demonstreze că volumul unui tetraedru $[ABCD]$ este a șasea parte din volumul unei prisme a cărei bază este un paralelogram cu laturile congruente și paralele cu două muchii opuse (AB) și (CD) și a cărui înălțime este egală cu cea mai scurtă distanță dintre cele două muchii.

8. Se construiește un coș de moară de forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată continuată cu o prismă patrulateră avînd baza comună cu baza mică a trunchiului de piramidă. Se știe că diagonala bazei mari este 180 cm, diagonala bazei mici 72 cm, iar înălțimea coșului este 160 cm. Să se calculeze volumul coșului știind că raportul dintre volumul trunchiului și cel al prismei este 8.

9. Un tetraedru $[VABC]$ are înălțimea h. La distanțele de $\frac{h}{3}$ și $\frac{h}{2}$ de vîrful V se duc plane paralele cu baza tetraedrului obținîndu-se secțiunile $A'B'C'$ respectiv $A''B''C''$. Să se determine raportul volumelor trunchiurilor de piramidă $[ABCA''B''C'']$ și $[A''B''C''A'B'C']$.

10*. Piramida $[VABCD]$ de înălțime h are ca bază un dreptunghi de laturi $AB = a$, $BC = b$, iar piciorul înălțimii este centrul bazei piramidei. Prin BC și mijlocul M al muchiei laterale (VA) se duce planul α. Se cere:

a) Să se calculeze raportul dintre volumele piramidelor $[VHMN]$ și $[HABCD]$ unde $\{N\} = VD \cap \alpha$ și $\{H\} = BM \cap CN$;

b) măsura unghiului diedru dintre fețele $[VAD]$ și $[HAD]$ în cazul particular $h = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$.

11*. Un paralelipiped are ca bază dreptunghiul $ABCD$, iar muchiile $[AB]$, $[AD]$ și $[AA']$ au respectiv lungimile a, b, c. Unghiurile $\widehat{A'AB}$ și $\widehat{A'AD}$ sînt congruente și au măsura x (în radiani).

a) Să se arate că $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

b) Să se arate că volumul paralelipipedului este $V = abc\sqrt{-\cos 2x}$.

c) Dacă α este măsura unghiului feței $[ABB'A']$ cu baza $[ABCD]$ și $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ să se arate că $\cos \alpha = \operatorname{ctg} x$.

12*. O piramidă triunghiulară regulată $[SABC]$ are latura bazei de lungime a și fețele laterale triunghiuri dreptunghice în S.

a) Să se calculeze volumul piramidei.

b) Fie D și E mijloacele muchiilor (AS) și (BC). Să se calculeze DE și măsurile α și β ale unghiurilor $\widehat{DEC}$ și $\widehat{SDE}$.

§ 6. Mulțimi măsurabile în spațiu

În paragraful precedent s-a definit funcția volum pentru mulțimi poliedrale. Există, însă, și alte mulțimi pentru care se poate defini volumul. Aceste mulțimi se vor numi mulțimi măsurabile.

Definiție. O mulțime M de puncte din spațiu se numește *mulțime măsurabilă* dacă există un număr real unic $v(M)$ cu proprietățile: $v(M)$ este egal sau mai mare decît volumul oricărei mulțimi poliedrale inclusă în M și este egal sau mai mic decît volumul oricărei mulțimi poliedrale care include pe M. În acest caz numărul $v(M)$ se numește *volumul mulțimii M*.

Este evident că mulţimile poliedrale sînt măsurabile. Dacă se notează cu $\mathcal{M}$ mulţimea mulţimilor măsurabile atunci $v : \mathcal{M} \to R_+$. Problema de a decide dacă o mulţime care nu este poliedrală este sau nu măsurabilă este o problemă a cărei rezolvare necesită cunoştinţe superioare de matematică şi va fi rezolvată în clasa a XII-a. Totuşi, în capitolul următor vor fi studiate cîteva astfel de mulţimi pentru care se va admite că sînt măsurabile. Noţiunile de *punct interior* al unei mulţimi măsurabile şi de *descompunere* a unei mulţimi măsurabile se introduc ca şi în cazul mulţimilor poliedrale.

Atunci, teoremele 1 şi 2 din paragraful precedent pot fi extinse.

Teorema 1. (Teorema de existenţă a funcţiei volum.) Există o funcţie $v: M \to \mathbf{R}_+$, care are proprietăţile (1)—(3) din teorema 1, § 5.

Teorema 2. (Principiul lui Cavalieri.) Fie $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ şi un plan α_0. Dacă pentru orice plan $\alpha \parallel \alpha_0$, mulţimile $\alpha \cap M_1$ şi $\alpha \cap M_2$ au arii şi acestea sînt egale atunci $v(M_1) = v(M_2)$.

Observaţii

1) Numărul $v(M)$ se numeşte *volumul* mulţimii M.

2) Restricţia funcţiei v la mulţimea $\mathcal{P}$ este funcţia volum definită în paragraful precedent.

3) Menţionăm că şi în acest caz, în formularea principiului lui Cavalieri considerăm că mulţimea vidă şi mulţimea formată dintr-un punct au arie nulă.

Calculul volumelor mulţimilor care vor fi studiate în capitolul următor va fi făcut pe baza acestor teoreme, admiţîndu-se că acele mulţimi (cilindru, con, corp sferic şi părţile lor) sînt măsurabile.

Exerciţii recapitulative

1. Se consideră piramida patrulateră $[OABCD]$ cu baza dreptunghi ($AB = a$, $BC = b$) şi muchia $[OA]$ perpendiculară pe planul bazei ($OA = h$). Se notează cu E şi F respectiv mijloacele segmentelor $[OC]$, $[OD]$. Se cere:

a) aria totală a piramidei;

b) să se precizeze ce fel de patrulater este $ABEF$ şi să i se calculeze aria;

c) volumul piramidei $[OABEF]$.

2*. O piramidă are ca bază triunghiul dreptunghic isoscel ABC cu $AB = AC = a$ şi muchia (SA) perpendiculară pe bază, $SA = b$. Să se calculeze:

a) aria totală a piramidei;

b) măsura unghiului diedru format de feţele $[SBC]$ şi $[ABC]$ în cazul $a = b\sqrt{2}$;

c) aria, în funcţie de a şi b, a secţiunii determinate în această piramidă de un plan ce trece prin A, este perpendicular pe faţa $[SBC]$ şi o intersectează pe aceasta după o dreaptă MN paralelă cu BC.

3*. Se consideră tetraedrul $[SABC]$ în care $SA = 2a$, $SB = SC = a\sqrt{3}$, $AB = AC = a$, iar unghiul dreptei SA cu planul ABC are măsura 45°. Fie M şi N respectiv mijloacele muchiilor $[SA]$, $[BC]$ şi D proiecţia lui S pe planul (ABC).

a) Să se arate că $BC \perp MN$ şi $BC \perp SA$.

b) Să se arate că $ABDC$ este pătrat.

c) Să se calculeze aria laterală a tetraedrului, considerînd ca bază triunghiul ABC.

4. Se consideră prisma $[ABCDA'B'C'D']$. Pe dreapta AD se consideră punctul E, astfel încît $A \in (ED)$, $AE = a$, iar pe CB se consideră punctul F astfel încît $B \in (FC)$, iar $BF = b$. Un plan ce trece prin dreapta EF intersectează muchiile laterale (AA'), (BB'), (CC'), (DD'), respectiv în punctele A_1, B_1, C_1, D_1. Să se demonstreze că $A_1B_1C_1D_1$ este un paralelogram și că $\frac{AA_1}{a} = \frac{BB_1}{b}$.

5. O cutie de tablă are forma de paralelipiped dreptunghic $[ABCDA'B'C'D']$ cu dimensiunile a, b, c și este plină cu ulei. Cutia fiind așezată cu baza $[ABCD]$ pe un plan orizontal se ridică de la un capăt rotind-o în jurul muchiei $[AD]$ $(AD = a)$ astfel că muchia opusă se află la distanță x față de planul orizontal. Ce cantitate de lichid poate rămîne în cutie? Discuție.

6*. O piramidă patrulateră regulată are muchiile laterale de lungime a.

a) Notînd cu x înălțimea piramidei, să se calculeze volumul acesteia.

b) Dacă α este măsura unghiului diedru format de două fețe laterale alăturate și β măsura unghiului pe care muchiile laterale îl formează cu laturile bazei, să se arate că $\cos \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta = 0$.

c) Se secționează piramida cu un plan paralel cu baza. Să se demonstreze că condiția necesară și suficientă ca să existe un punct egal depărtat de cele șase fețe ale trunchiului de piramidă format este ca înălțimea trunchiului să fie medie proporțională între laturile bazelor.

7*. Lungimea muchiilor unui cub este a. Să se afle distanța dintre o diagonală a cubului și o diagonală a fețelor laterale cu care nu se intersectează.

8. Se consideră tetraedrul $[ABCD]$, punctele $M \in (AC)$ și $N \in (AD)$ și se duce prin C paralela la BM care taie pe AB în Q și prin D paralela la MN care taie pe AC în P. Să se arate că volumele tetraedrelor $[ABCD]$ și $[ANPQ]$ sînt egale.

9*. Fie $[VABCDEF]$ o piramidă hexagonală regulată cu muchia bazei de lungime a și înălțimea piramidei $VO = a$. Pe muchia $[VC]$ se consideră un punct oarecare M. Planul (ABM) intersectează muchiile $[VD]$, $[VE]$ și $[VF]$ respectiv în N, P și Q. Să se arate că:

a) Dreptele AN, BP, MQ și VO sînt concurente.

b) Patrulaterele $ABMQ$ și $MNPQ$ sînt trapeze isoscele.

c) Să se afle locul geometric al punctului de intersecție al dreptelor AM și BP cînd M descrie muchia $[VC]$.

d) În cazul cînd M este mijlocul segmentului $[VC]$ să se afle raportul ariilor suprafețelor $[MNPQ]$ și $[ABMQ]$.

10. Se consideră cubul $[ABCDA'B'C'D']$ cu latura de lungime $3a$. Se împarte fiecare latură a cubului în cîte trei segmente congruente. Fie M, N, P punctele de diviziune cele mai apropiate de A, aflate respectiv pe muchiile (AB), (AD), (AA'). Se secționează cubul cu planul (MNP) și se îndepărtează piramida $(AMNP)$. Se procedează la fel cu toate celelalte 8 vîrfuri ale cubului. Se cere:

a) Să se verifice relația: $f + v = m + 2$ (f, v, m — reprezintă respectiv numărul fețelor, vîrfurilor și muchiilor) poliedrului rămas.

b) Să se calculeze aria poliedrului obținut.

c) Să se afle măsura unghiului plan corespunzător unghiului diedru format de planul (MNP) cu planul bazei cubului.

d) Să se determine distanța de la vîrful A la planul (MNP).

Capitolul VII

Corpuri rotunde

După cum s-a arătat în introducerea la Capitolul VI, corpurile geometrice sînt imagini matematice ale unor corpuri bine cunoscute din spaţiul fizic. În afară de poliedre, corpurile mărginite de suprafeţe plane, există şi corpuri care, parţial sau total, sînt mărginite de suprafeţe neplane.

În tehnică pot fi întîlnite multe astfel de corpuri ca de exemplu: recipienţi pentru gaze, cazane de presiune, cisterne, containere pentru ciment, silozuri de ciment, ventile conice, pahare, abajururi, rulmenţi etc., numite „corpuri rotunde".

Acordînd un rol special intuiţiei spaţiale, vom studia în acest capitol cilindrul, conul, sfera şi părţile lor.

§ 1. Cilindrul

Într-un mod analog cu definirea prismei se defineşte şi cilindrul. Să considerăm două plane paralele α şi α', un disc $D = [\mathcal{C}(O, R, \alpha)]$ (notînd un cerc sau un disc din spaţiu, se pune în evidenţă şi planul în care se află) în α şi o dreaptă d care intersectează planul α într-un singur punct (fig. VII.1). Prin fiecare punct $P \in D = [\mathcal{C}(O, R, \alpha)]$ construim un segment $[PP']$ paralel cu d, unde $P' \in \alpha'$. *Reuniunea* C *a tuturor segmentelor* $[PP']$, *astfel încît* $PP' \parallel d$, $P \in D$ şi $P' \in \alpha'$, *se numeşte cilindru circular de baze* D şi $D' = C \cap \alpha'$. Distanţa dintre planele α şi α' se numeşte *înălţimea cilindrului*.

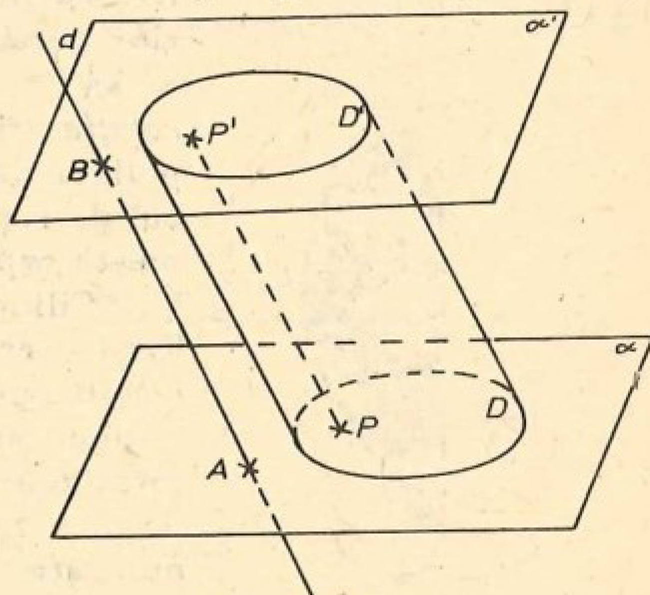


Fig. VII.1.

Proprietatea 1. *În orice cilindru cele două baze sînt discuri cu aceeaşi rază.*

Demonstraţia este analoagă cu cea de la prismă (Cap. VI § 1, proprietatea 1).

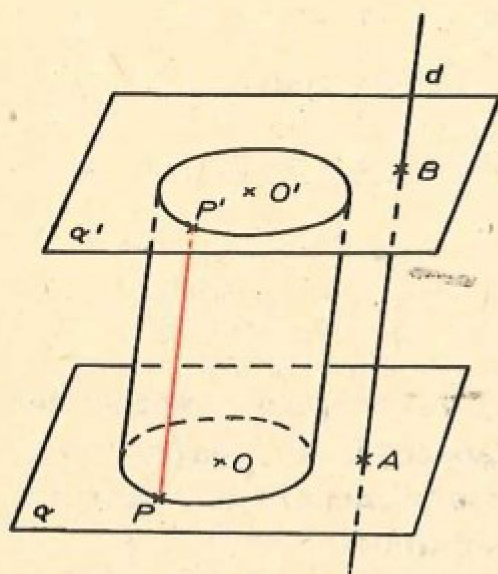


Fig. VII.2.

Dacă dreapta d este perpendiculară pe α, atunci C se numeşte *cilindru circular drept.*

Reuniunea tuturor segmentelor $[PP']$ cu $P \in \in \mathcal{C}(O, R, \alpha)$, $P' \in \alpha'$ şi $PP' \| d$, formează *suprafaţa laterală a cilindrului* (fig. VII.2). Mulţimea punctelor cilindrului, care nu aparţin nici suprafeţei laterale şi nici bazelor, se numeşte *interiorul cilindrului.* Segmentele $[PP']$ cu $P \in \mathcal{C}(O, R, \alpha)$ sînt *generatoarele* cilindrului, iar raza cercurilor de bază, *raza* cilindrului. În cazul cilindrului circular drept, înălţimea este egală cu lungimea oricărei generatoare.

Proprietatea 2. *Intersecţia nevidă a unui cilindru circular printr-un plan paralel cu bazele lui este un disc de aceeaşi rază cu raza bazei.*

Această proprietate rezultă imediat din proprietatea 1.

Corp de rotaţie şi suprafaţă de rotaţie

Să considerăm un corp care se mişcă în spaţiu, astfel încît fiecare punct al său rămîne la distanţă constantă de o dreaptă fixă. Exemple: placa de patefon, roata olarului, roata tocilarului etc. Mişcările de acest fel se numesc mişcări de rotaţie. Fiecare punct al corpului descrie un cerc situat într-un plan perpendicular pe o dreaptă fixă d numită axă de rotaţie, avînd centrul situat pe d. Mişcările de rotaţie ne conduc la următoarele consideraţii geometrice:

Să considerăm o dreaptă fixă d şi un punct oarecare P din spaţiu. Notăm cu P^* proiecţia lui P pe d şi cu α_P planul perpendicular pe d, care trece prin P. Dacă S este o suprafaţă (o suprafaţă poligonală simplă, disc etc.) situată în acelaşi plan cu d, care nu are nici un punct interior pe d, atunci reuniunea tuturor cercurilor $C_P = \mathcal{C}(P^*, P^*P, \alpha_P)$ cu $P \in S$, se numeşte *corp de rotaţie* (fig. VII.3). Dacă L este o curbă (linie poligonală, arc de cerc etc.) situată în acelaşi plan cu d, reuniunea cercurilor C_P cu $P \in L$ se numeşte *suprafaţă de rotaţie.*

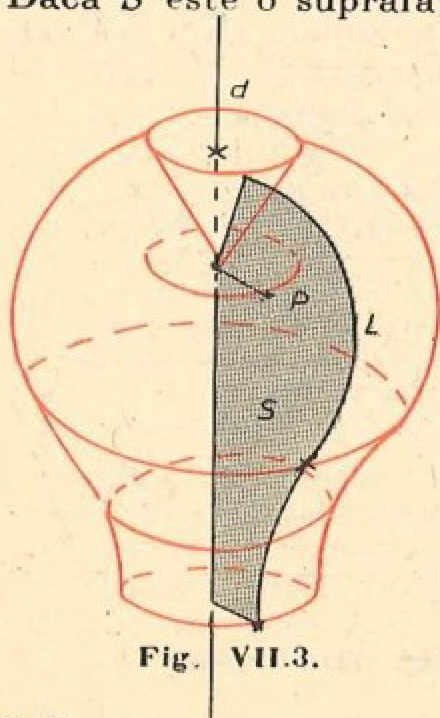


Fig. VII.3.

Cilindrul circular drept îl putem defini şi ca fiind corpul care se obţine prin rotaţia unei suprafeţe dreptunghiulare în jurul suportului unei laturi. Atunci suprafaţa lui laterală este generată prin rotaţia unui segment $[AB]$ în jurul unei drepte d, paralel cu el (fig. VII.4 şi VII.5). Dreapta d se numeşte *axa cilindrului circular drept (sau de rotaţie).* Orice plan dus prin axa lui este un plan de

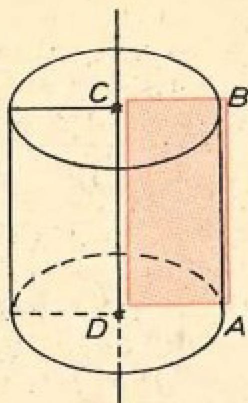


Fig. VII.4.

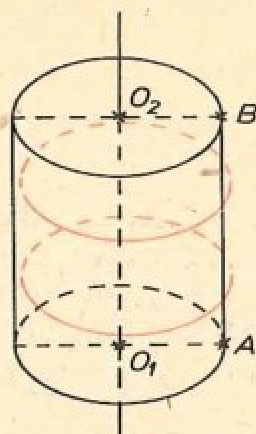


Fig. VII.5.

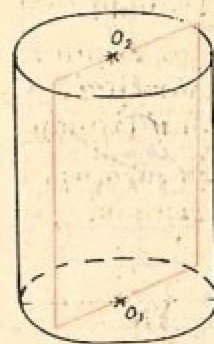


Fig. VII.6.

simetrie pentru cilindrul circular drept, iar secţiunea unui cilindru printr-un asemenea plan se numeşte *secţiune axială* (fig. VII.6).

Aria laterală şi totală a unui cilindru de rotaţie

Fiind dat un cilindru de rotaţie C se numeşte *prismă înscrisă* în acest cilindru o prismă ale cărei baze sînt poligoane înscrise în cercurile de bază ale lui C şi avînd muchiile laterale generatoare ale cilindrului (fig. VII.7). Ariile laterale ale tuturor acestor prisme aproximează prin lipsă un număr unic, numit *aria laterală a cilindrului* şi notat cu $\sigma_l(C)$. $\sigma_l(C)$ este cel mai mic dintre numerele mai mari decît ariile laterale ale prismelor înscrise în C.

La aria laterală a unui cilindru de rotaţie cu raza R şi lungimea generatoarei G, putem ajunge intuitiv astfel: dacă tăiem suprafaţa laterală a cilindrului de-a lungul unei generatoare $[AB]$ şi o aşternem pe un plan, spunem că *desfăşurăm* suprafaţa cilindrului pe plan, suprafaţa cilindrică luînd forma unui dreptunghi $AA'B'B$ (fig. VII.8), a cărui arie este aria laterală a cilindrului. Se constată că AA' este egal cu lungimea cercului de bază a cilindrului, deci $AA' = 2\pi R$. Aşadar, aria laterală a cilindrului se exprimă prin $\sigma_l(C) = AA' \cdot AB = 2\pi RG$. Astfel am obţinut pe cale intuitivă (demonstraţia completă se omite):

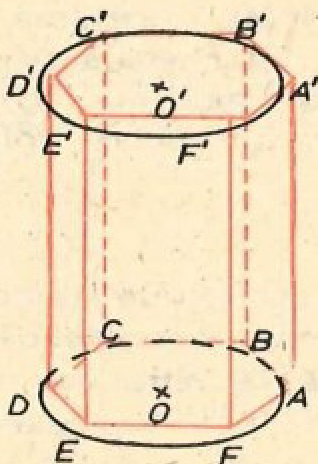


Fig. VII.7.

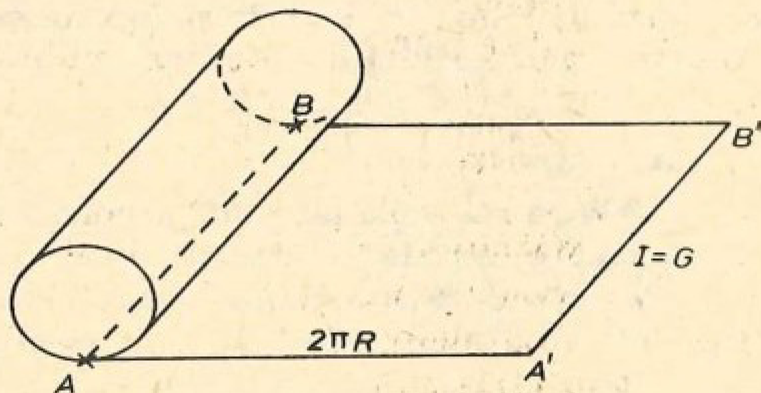


Fig. VII.8.

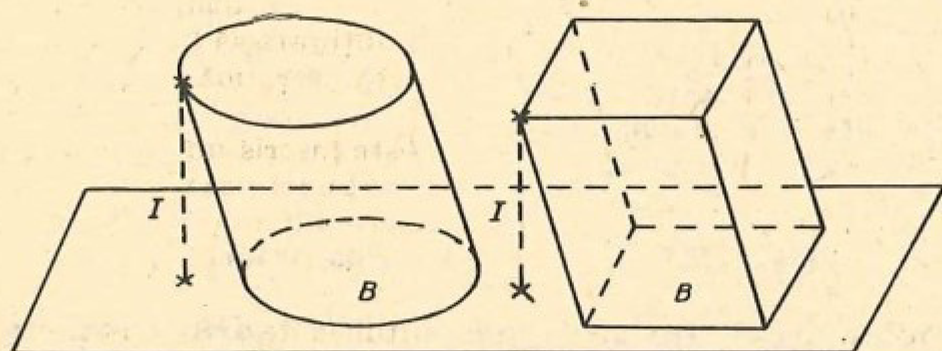


Fig. VII.9.

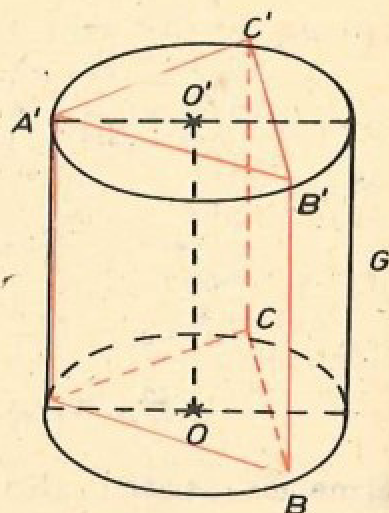


Fig. VII.10.

Aria laterală a cilindrului de rotație se calculează cu formula:

$$\boxed{\text{aria lat. cil.} = 2\pi RG}$$

unde R este raza, iar G generatoarea cilindrului.

Aria totală a cilindrului de rotație C, notată cu $\sigma_t(C)$, este suma dintre aria sa laterală și ariile celor două baze.

Cum cele două baze sînt congruente, ariile lor vor fi egale. Deci $\sigma_t(C) = 2\pi RG + 2\pi R^2$, de unde

$$\boxed{\text{aria totală cil.} = 2\pi R(R + G)}$$

Volumul cilindrului circular

Volumul unui cilindru circular este dat de formula:

$$\boxed{\text{vol. cil.} = \pi R^2 \cdot I}$$

unde R este raza, iar I înălțimea cilindrului.

Pentru a demonstra această formulă, să considerăm o prismă cu bazele în aceleași plane cu bazele cilindrului, avînd aria bazei B egală cu aria bazei cilindrului, adică $B = \pi R^2$ și înălțimea prismei este egală cu I (fig. VII.9). Aplicînd principiul lui Cavalieri, cilindrul și prisma au același volum, adică $v(C) = v(P) = B \cdot I = \pi R^2 \cdot I$.

Aplicații

1) Să se afle aria laterală și volumul cilindrului C circumscris unei prisme triunghiulare regulate care are latura bazei egală cu a și muchia laterală b.

Rezolvare. Fie prisma $[ABCA'B'C']$ înscrisă în cilindrul de rotație (fig. VII.10). Avem $G = I_{\text{prismei}} = b$ și $AB = R\sqrt{3}$, de unde obținem $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, deci $\sigma_l(C) = 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot b = \frac{2ab\sqrt{3}}{3}\pi$; $v(C) = \pi R^2 \cdot I = \frac{a^2b}{3}\pi$.

Exerciţii

1. Secţiunea axială a unui cilindru este un pătrat de arie a. Să se afle volumul cilindrului.

2. Înălţimea unui cilindru circular drept este de 8, iar raza 5. La ce distanţă de axa cilindrului trebuie dus un plan paralel cu ea, astfel încît secţiunea obţinută să fie un pătrat?

3. Secţiunea axială a unui cilindru de rotaţie este o suprafaţă pătratică cu diagonala egală cu 4. Să se afle aria totală şi volumul cilindrului.

4. Într-un cilindru circular drept cu raza 7 şi înălţimea 2 este înscris un pătrat oblic faţă de axa cilindrului, astfel încît două vîrfuri ale sale sînt pe cercul unei baze, iar celelalte două pe cercul celeilalte baze. Să se afle: a) latura pătratului, b) aria laterală a cilindrului.

5. Un cilindru circular drept are raza bazei a şi înălţimea egală cu lungimea cercului de bază. Să se afle aria totală şi volumul cilindrului.

6. Aria totală a unui cilindru de rotaţie este de $90\,\pi$, iar înălţimea de 4. Să se calculeze volumul prismei hexagonale regulate înscrise în cilindru.

7. Să se arate că oricare ar fi cilindrul de rotaţie, raportul dintre aria laterală a cilindrului şi aria laterală a prismei triunghiulare regulate înscrise în cilindru este $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, iar raportul volumelor este $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

8. Să se calculeze aria totală şi volumul cilindrului circular drept circumscris unui cub cu muchia a.

9. Aria laterală a unui cilindru circular drept este egală cu suma ariilor bazelor. Ştiind că volumul cilindrului este $1\,000\,\pi$, să se calculeze raza şi generatoarea cilindrului.

10. Aria laterală a unui cilindru de rotaţie este $160\,\pi$, iar volumul $640\,\pi$. Să se calculeze aria secţiunii axiale.

11. Dintr-o piesă de oţel avînd forma unei prisme patrulatere regulate drepte cu latura bazei de 10 cm şi înălţimea de 12 cm se strunjeşte o piesă cilindrică cu minimum de material pierdut. Să se afle aria laterală şi volumul piesei obţinute.

12. Să se afle masa unei ţevi de plumb lungă de 5 m, cu grosimea de 4 cm şi diametrul interior de 3 cm, densitatea plumbului fiind de 11,3.

13. Dintr-un trunchi de arbore lung de 6 m, de formă cilindrică avînd lungimea cercului de bază 125,6 cm, se ciopleşte o grindă cu secţiunea pătrată. Să se calculeze masa acestei grinzi, ştiind că densitatea lemnului este 0,8.

§ 2. Conul

Fie discul $D = [\mathcal{C}(O, R, \alpha)]$ într-un plan α şi fie V un punct care nu aparţine lui α. *Se numeşte con circular cu baza D şi vîrf V reuniunea tuturor segmentelor $[VP]$, unde $P \in D$* (fig. VII.11). Segmentul $[VA]$, unde $A = \text{pr}_\alpha V$ se numeşte *înălţimea* conului. Fără pericol de confuzie, numărul $I = VA$ poate fi numit de asemenea înălţimea conului.

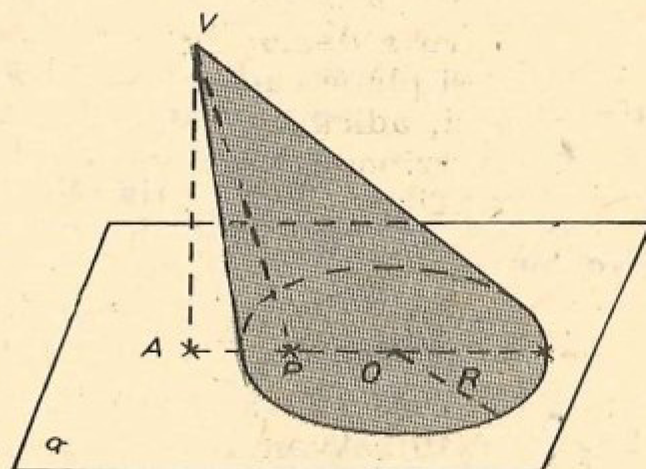


Fig. VII.11.

Reuniunea tuturor segmentelor $[VP]$ pentru care $P \in \mathcal{C}(O, R, \alpha)$ for-

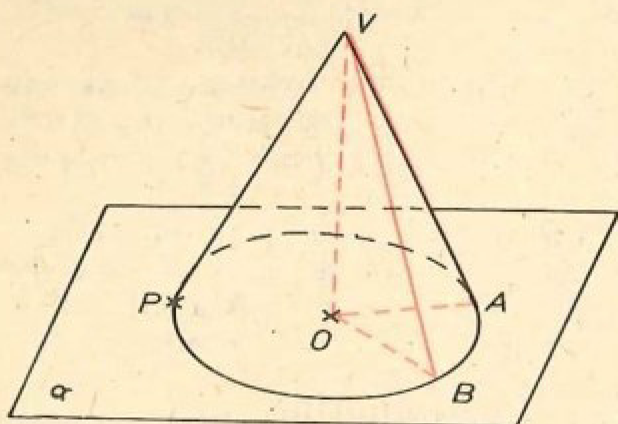


Fig. VII.12.

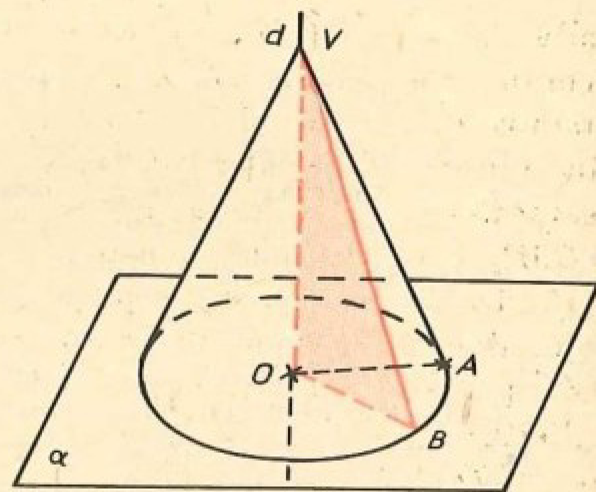


Fig. VII.13.

mează suprafaţa *laterală a conului*. Orice segment $[VP]$ cu $P \in \mathcal{C}(O, R, \alpha)$ se numeşte *generatoare* a conului. Mulţimea punctelor conului care nu aparţin nici suprafeţei laterale şi nici bazei se numeşte *interiorul conului.*

Spunem că un con circular este *drept* dacă proiecţia lui pe planul discului este centrul discului O (fig. VII.12).

Într-un con circular drept generatoarele sînt congruente. Într-adevăr, dacă $[VA]$ şi $[VB]$ sînt două generatoare, triunghiurile dreptunghice VOA şi VOB sînt congruente (fig. VII. 12).

Dacă notăm cu R raza bazei unui con circular drept, iar cu I înălţimea şi G generatoarea sa, atunci există relaţia:

$$G^2 = R^2 + I^2$$

dedusă din triunghiul VOA dreptunghic în O (fig. II.12).

Ţinînd cont de definiţiile date corpului de rotaţie şi suprafeţei de rotaţie în § 1, *conul circular drept* îl putem defini şi ca fiind corpul care se obţine prin rotaţia unei suprafeţe triunghiulare dreptunghice în jurul suportului unei catete d (fig. VII.13). Atunci ipotenuza descrie suprafaţa laterală a conului.

Secţiuni transversale prin conuri

Să considerăm un con circular C, cu baza discul $[\mathcal{C}(O, R, \alpha)]$ şi înălţimea $VA = I$ şi un plan β paralel cu α, de aceeaşi parte a lui α ca şi V şi la distanţa $h < I$ de la planul α. Intersecţia $C \cap \beta$ se numeşte *secţiune transversală prin con la înălţimea h* (fig. VII.14). Intersecţia $C \cap (\beta V$ se numeşte *conul format prin secţionarea lui C cu planul* β. Vom demonstra că acesta este un con circular.

Proprietatea 1. *Secţiunea transversală prin conul circular C la distanţa h de la bază este un disc de rază*

(1) $$R' = \frac{I'}{I} \cdot R, \text{ unde } I' = I - h.$$

Demonstraţie. Baza conului C fiind discul $D = [\mathcal{C}(O, R, \alpha)]$, asociind fiecărui punct $M \in D$ punctul $\{M'\} = VM \cap \beta$, se obţine o bijecţie $g : D \to D'$,

unde $D' = C \cap \beta$ (fig. VII.14). Trebuie să arătăm că D' este tot un disc. Ca şi în cazul piramidei, aplicaţia g este asemănare, deoarece planul (VOM) taie planele paralele α, β după două drepte paralele, deci $OM \parallel O'M'$ şi analog $OA \parallel O'A'$. Prin urmare, $\triangle VOM \sim \triangle VO'M'$ şi $\triangle VOA \sim \sim \triangle VO'A'$. Rezultă că:

$$(2) \quad \frac{O'M'}{OM} = \frac{VO'}{VO} = \frac{VA'}{VA},$$

deci

$$(3) \quad O'M' = \frac{I'}{I} \cdot OM.$$

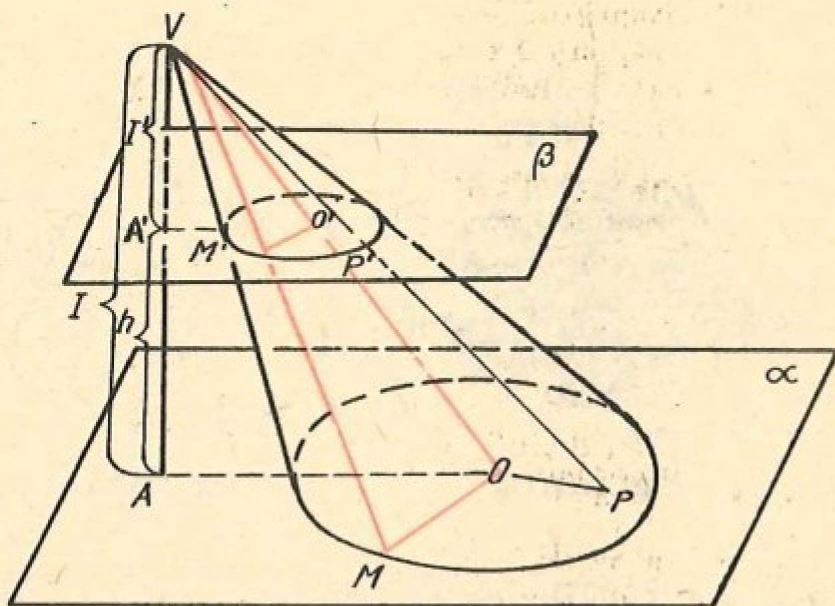


Fig. VII.14.

Este evident că o asemănare aplică un disc într-un disc, deci D' este un disc de rază $\frac{I'}{I} R$.

Aplicaţii.

1. *Raportul dintre aria bazei unui con circular şi aria secţiunii transversale prin con la distanţa h de la planul bazei, este egal cu pătratul raportului dintre înălţimea conului dat şi înălţimea conului format prin secţionare.*

Rezolvare: vom folosi datele şi notaţiile de la demonstraţia precedentă (fig. VII.14).

Fie R şi R' respectiv razele bazelor conului dat şi a conului format prin secţionare şi S şi S' ariile lor. Avem:

$$(4) \qquad \frac{S}{S'} = \frac{\pi R^2}{\pi R'^2} = \left(\frac{R}{R'}\right)^2.$$

Dar din relaţia (2) avem:

$$\frac{R}{R'} = \frac{OM}{O'M'} = \frac{VA}{VA'} = \frac{I}{I'}.$$

Înlocuind în relaţia (4) obţinem:

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{I}{I'}\right)^2,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

2. *Prin secţionarea unui con circular drept cu un plan paralel cu planul bazei se formează un con avînd înălţimea, generatoarea şi raza bazei proporţionale cu înălţimea, generatoarea şi raza bazei conului dat* (fig. **VII.15**).

Demonstraţia se lasă ca exerciţiu.

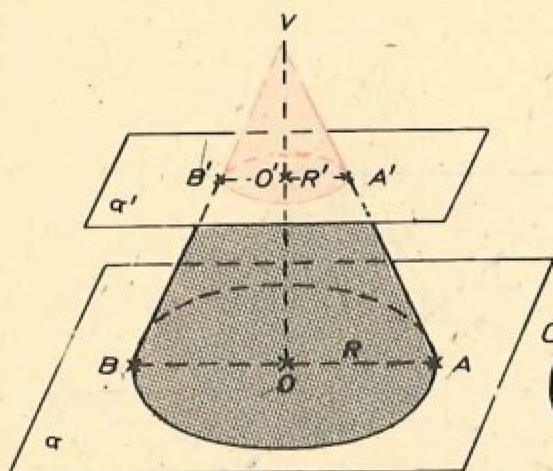


Fig. VII.15.

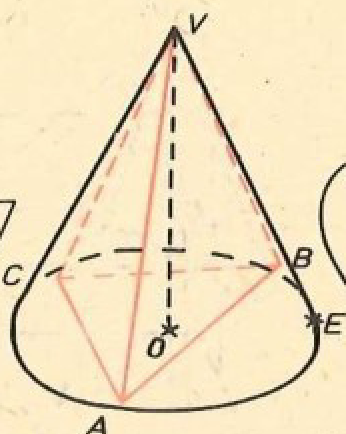


Fig. VII.16.

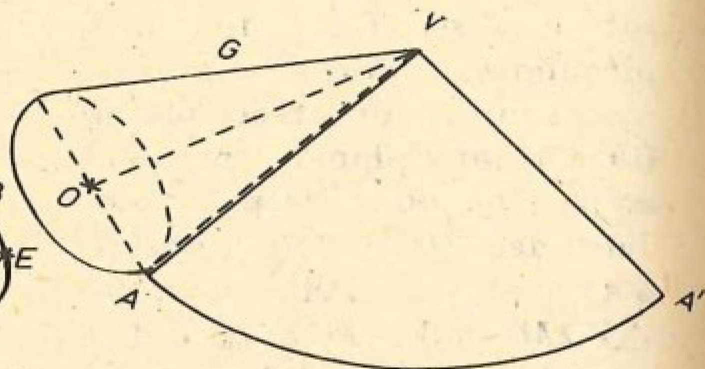


Fig. VII.17.

Aria laterală și totală a conului circular drept

Fiind dat un con circular drept C se numește *piramidă înscrisă* în acest con, piramida a cărei bază este un poligon înscris în cercul de bază a lui C și al cărei vîrf coincide cu vîrful conului (fig. VII.16). Muchiile laterale ale piramidei înscrise în conul circular drept sînt generatoare ale conului, iar înălțimea piramidei este înălțimea conului. Ariile laterale ale tuturor acestor piramide aproximează prin lipsă un număr unic, numit *aria laterală a conului* și notat cu $\sigma_l(C)$. $\sigma_l(C)$ este cel mai mic dintre numerele mai mari decît ariile laterale ale piramidelor înscrise în C.

La aria laterală a unui con circular drept C de rază R și generatoare G putem ajunge tot pe cale intuitivă astfel: dacă tăiem suprafața laterală a conului circular drept după o generatoare $[VA]$ și o așternem pe un plan α, spunem că *desfășurăm* suprafața laterală a conului pe plan, aceasta luînd forma unui sector de cerc determinat de arcul $\widehat{AA'}$ al cercului $\mathcal{C}(V, G, \alpha)$, unde $l_{\widehat{AA'}} = 2\pi R$ (fig. VII.17). Aria laterală a conului fiind egală cu aria sectorului de cerc, obținem: $\sigma_l(C) = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot G$. Cu ajutorul intuiției am ajuns la următorul rezultat (a cărui demonstrație se omite):

Aria laterală a conului circular drept se calculează cu formula:

$$\boxed{\text{aria lat. con} = \pi RG}$$

unde R este raza, iar G generatoarea conului.

Aria totală a conului circular drept este suma dintre aria sa laterală și aria bazei. Deci

$$\sigma_t(C) = \sigma_l(C) + \sigma_b = \pi RG + \pi R^2,$$

de unde

$$\boxed{\text{aria tot. con} = \pi R(R + G)}$$

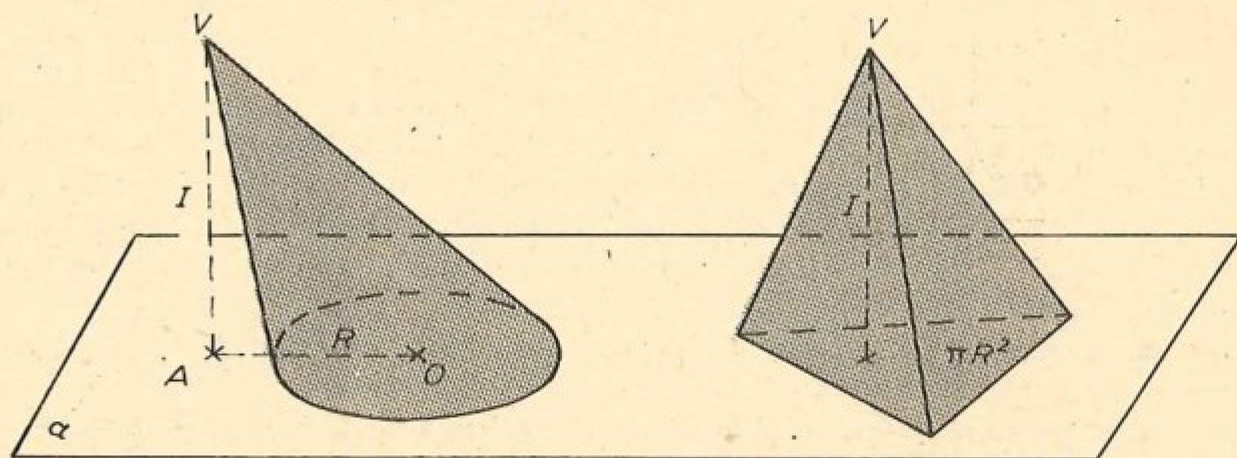


Fig. VII.18.

Volumul conului circular

Fie C un con circular (nu neapărat drept) cu aria bazei πR^2 și înălțimea I. *Volumul unui con circular este dat de formula:*

$$\boxed{\text{vol. con} = \frac{\pi R^2 \cdot I}{3}}$$

Pentru a demonstra această formulă să considerăm o piramidă P cu baza în același plan α cu baza conului, avînd aria bazei egală cu aria bazei conului și aceeași înălțime (fig. VII.18). Aplicînd principiul lui Cavalieri, obținem că piramida și conul au același volum, adică

$$v(C) = v(P) = \frac{1}{3} \cdot (\pi R^2) \cdot I = \frac{\pi R^2 \cdot I}{3}.$$

Aplicații.

1. Într-un con echilateral C este înscrisă o piramidă patrulateră regulată P. Care este raportul ariilor laterale ale conului și piramidei?

Rezolvare. Conul echilateral are secțiunea axială un triunghi echilateral. Deci $VA = CV = AC = G$ (fig. VII.19). Atunci $R = \frac{G}{2}$. Deci $\sigma_l(C) = \pi RG = \pi \frac{G^2}{2} \cdot \sigma_l(P) = \frac{4(R\sqrt{2}) \cdot VM}{2}$, unde M este mijlocul lui (AB). Aplicînd teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VAM, obținem:

$$VM = \sqrt{VA^2 - AM^2} = \sqrt{G^2 - \left(\frac{G\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{G\sqrt{14}}{4}.$$

Deci

$$\sigma_l(P) = G\sqrt{2}\,\frac{G\sqrt{14}}{4} = \frac{G^2\sqrt{7}}{2}$$

și

$$\frac{\sigma_l(C)}{\sigma_l(P)} = \frac{\pi}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}\,\pi}{7}.$$

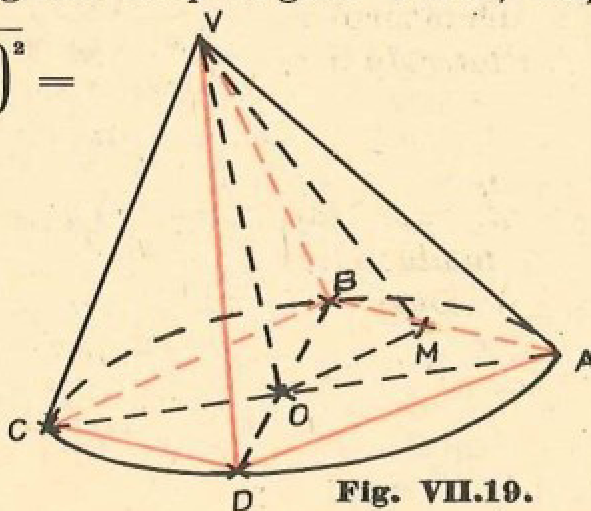


Fig. VII.19.

Exerciții

1. Un con circular drept cu raza bazei R și înălțimea h este intersectat cu un plan paralel cu baza. La ce distanță de vîrf trebuie dus planul astfel încît aria secțiunii să fie egală cu jumătatea ariei bazei?

2. Un con circular drept are generatoarea de lungime 13 și raza bazei 5. Să se calculeze aria secțiunii duse prin vîrful conului, care determină pe bază o coardă egală cu latura unui hexagon regulat înscris în cercul bazei.

3. Secțiunea axială a unui con de rotație este un triunghi dreptunghic isoscel a cărui arie este 9. Să se afle aria totală și volumul conului.

4. Aria bazei unui con de rotație este egală cu 36π, iar aria totală cu 96π. Să se afle volumul conului.

5. Aria laterală a unui con de rotație este 320π, iar raza conului este $\frac{4}{5}$ din generatoare. Să se calculeze volumul conului.

6. Înălțimea unui con de rotație este egală cu 15, iar suma dintre generatoare și rază este 25. Să se calculeze aria laterală și volumul conului.

7. Să se calculeze volumul conului înscris într-un tetraedru regulat de muchie a.

8. Un cort conic are înălțimea de 3 m și diametrul bazei de 8 m. Cîți metri pătrați de pînză au fost folosiți pentru confecționarea cortului?

9. Într-un con circular drept se dă raza bazei R și înălțimea h. Să se determine muchia cubului înscris în con.

10. Într-un con circular drept cu raza R și înălțimea h se înscrie o prismă triunghiulară regulată ale cărei fețe laterale sînt pătrate. Să se determine muchia laterală a prismei.

11. Să se afle volumul și aria corpului obținut prin rotația unei suprafețe triunghiulare isoscele $[ABC]$ în jurul lui AB, știind că $AB = AC = 25$ și $BC = 30$.

12. Dintr-o piesă de oțel avînd forma unei piramide regulate cu baza un pătrat de latură 10 cm și înălțimea 12 cm, se strunjește o piesă conică cu minimum de material pierdut. Să se afle aria laterală și volumul piesei obținute.

§ 3. Trunchiul de con

Trunchiul de con se definește în mod asemănător cu trunchiul de piramidă. Fie C un con circular avînd vîrful V și baza discul $[\mathscr{C}(O, R, \alpha)]$. Considerăm un plan α' paralel cu planul bazei α de aceeași parte a lui α ca și V, care determină în conul C o secțiune transversală și un nou con C' avînd vîrful V și baza discul $[\mathscr{C}(O', r, \alpha')]$. Corpul obținut prin înlăturarea din conul C a conului C', fără bază, se numește *trunchi de con*. Deci mulțimea $T = (C - C') \cup [\mathscr{C}(O', r, \alpha')]$ este *trunchi de con* (fig. VII.20). Discurile $[\mathscr{C}(O, R, \alpha)]$ și $[C(O', r, \alpha')]$ se numesc *bazele* trunchiului de con.

Dacă planul α' taie generatoarea $[VM]$ a conului C în punctul M' segmentul $[MM']$ se numește *generatoare* a trunchiului de con T. Segmentele $[AA']$, $[BB']$ sînt generatoare ale lui T (fig. VII.20). Partea din suprafața laterală a conului C cuprinsă între planele α și α' este *suprafața laterală a trunchiului de con*.

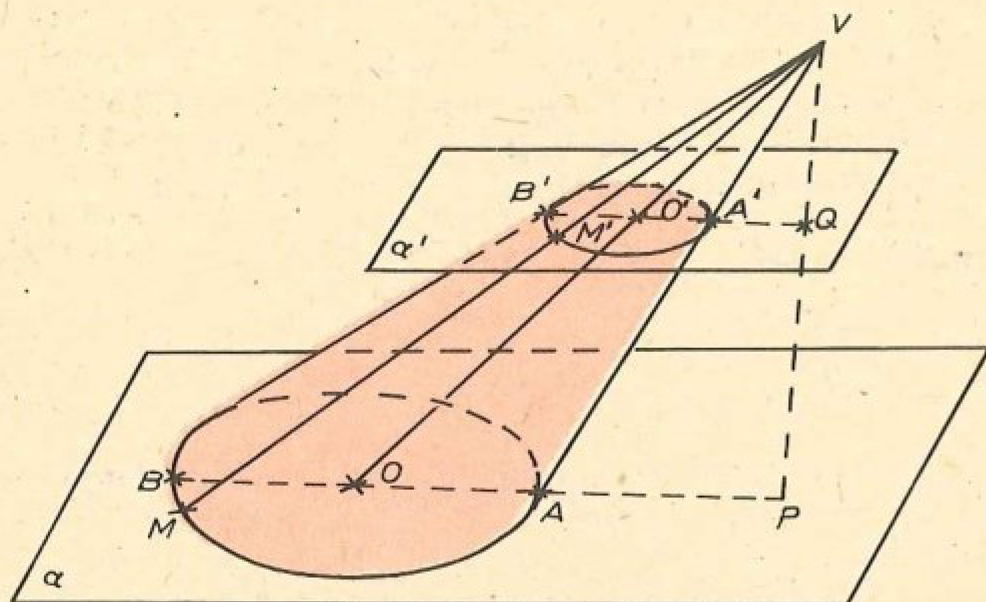


Fig. VII.20.

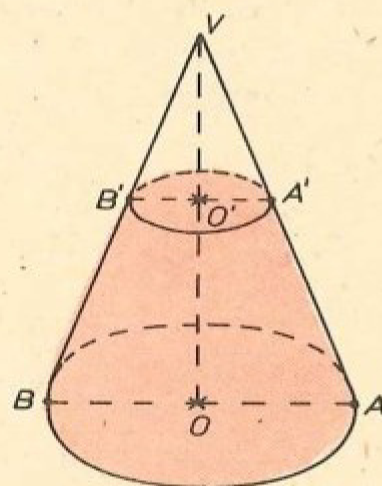


Fig. VII.21.

Înălţimea h a trunchiului de con este distanţa dintre planele α şi α' şi este egală cu diferenţa dintre înălţimile I şi I' ale conurilor C şi C', deci $h = I - I'$.

Un trunchi de con circular este *drept* dacă el rezultă dintr-un con circular drept (fig. VII.21).

Exerciţii

1. Arătaţi că un trunchi de con circular este drept dacă şi numai dacă dreapta ce uneşte centrele bazelor este perpendiculară pe planele bazelor.

2. Să se arate că într-un trunchi de con circular drept, avînd centrele bazelor O, O', dacă $[AA']$ este o generatoare, atunci patrulaterul $OAA'O'$ este trapez dreptunghic cu bazele $[OA]$, $[O'A']$ şi cu înălţimea $[OO']$ (fig. VII.21).

3. Într-un trunchi de con circular drept, generatoarele sînt congruente.

Trunchiul de con circular drept este un corp de rotaţie. Orice trunchi de con circular drept se obţine prin rotaţia unei suprafeţe trapezoidale dreptunghice $[OMM'O']$ în jurul suportului d a laturii perpendiculare pe baze (fig. VII.22). Dreapta $d = OO'$ se numeşte *axa* de rotaţie a trunchiului de con. Suprafaţa laterală a trunchiului de con se obţine prin rotaţia lui $[MM']$ în jurul lui d.

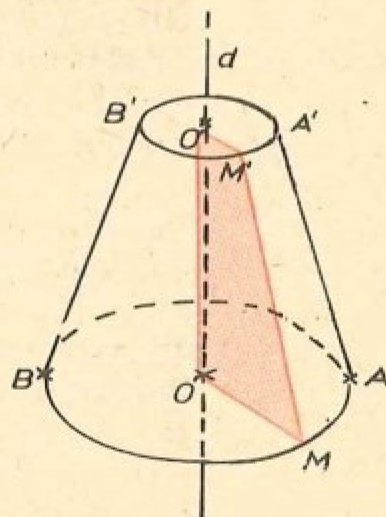


Fig. VII.22.

Să considerăm trunchiul de con $T = (C - C') \cup \cup[\mathscr{C}(O', r, \alpha')]$. Ariile laterale ale tuturor trunchiurilor de piramidă înscrise în T aproximează prin lipsă un număr unic, numit *aria laterală a trunchiului de con* şi notat cu $\sigma_l(T)$. $\sigma_l(T)$ este cel mai mic dintre numerele mai mari decît ariile laterale ale trunchiurilor de piramidă înscrise în T.

Folosind notațiile din figura VII.21 se observă că aria laterală a trunchiului de con este egală cu diferența ariilor laterale a conurilor C și C', avînd aceeași axă de rotație VO și același vîrf V. Deci $\sigma_l(T) = \sigma_l(C) - \sigma_l(C')$.

Cum $\sigma_l(C) = \pi RG$ și $\sigma_l(C') = \pi rG'$, unde prin R, r am notat razele bazelor, iar prin G, G' respectiv generatoarele conurilor C și C', rezultă

$$(1) \qquad \sigma_l(T) = \pi RG - \pi rG' = \pi(RG - rG').$$

Conform aplicației 2 din § 2 putem scrie:

$$\frac{R}{r} = \frac{G}{G'}.$$

Notînd cu g generatoarea trunchiului de con T, $g = G - G'$, obținem:

$$\frac{R}{R-r} = \frac{G}{G-G'} = \frac{G}{g},$$

de unde rezultă

$$(2) \qquad G = \frac{R \cdot g}{R - r}.$$

Analog se deduce că

$$(3) \qquad G' = \frac{r \cdot g}{R - r}.$$

Înlocuind pe G și G' din relațiile (2), respectiv (3) în relația (1) obținem:

$$\sigma_l(T) = \pi\left(\frac{R^2 \cdot g}{R-r} - \frac{r^2 \cdot g}{R-r}\right) = \pi g \cdot \frac{R^2 - r^2}{R - r} = \pi g(R + r).$$

Deci

Aria laterală a trunchiului de con circular drept se calculează cu formula:

$$\boxed{\text{aria lat. tr. con} = \pi g(R + r)}$$

unde R, r, g sînt respectiv razele bazelor trunchiului de con și generatoarea sa.

Aria totală a trunchiului de con circular drept este suma dintre aria sa laterală și ariile celor două baze.

Deci

$$\boxed{\text{aria totală tr. con} = \pi g(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2}$$

Ținînd cont că $C = T \cup C'$, volumul trunchiului de con oarecare îl putem obține făcînd diferența volumelor celor două conuri C, C', deci

$$(4) \qquad v(T) = \frac{\pi R^2 I}{3} - \frac{\pi r^2 I'}{3} = \frac{\pi}{3}(R^2 \cdot I - r^2 \cdot I'),$$

unde I, I' sînt înălțimile conurilor C, C'.

Fie $h = I - I'$ înălţimea trunchiului de con. Folosind aceeaşi aplicaţie 2. § 2 putem scrie că

$$\frac{I}{I'} = \frac{R}{r}, \quad \frac{I}{I - I'} = \frac{R}{R - r},$$

de unde

(5) $$I = \frac{Rh}{R - r}.$$

Analog obţinem

(6) $$I' = \frac{r \cdot h}{R - r}.$$

Înlocuind pe I şi I' din relaţiile (5) şi (6) în relaţia (4) obţinem:

$$v(T) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{R^3h}{R - r} - \frac{r^3h}{R - r}\right) = \frac{\pi h}{3(R - r)}(R^3 - r^3) = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$

Am demonstrat:
Volumul unui trunchi de con circular este dat de formula:

(7) $$\boxed{\text{vol. tr. con} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)}$$

unde R, r şi h sînt respectiv razele bazelor şi înălţimea trunchiului de con.

Demonstraţi formula volumului trunchiului de con folosind formula volumului pentru trunchiul de piramidă şi principiul lui Cavalieri!

Aplicaţie.

1. Să se demonstreze că volumul trunchiului de con se calculează şi prin formula

(8) $$v(T) = \frac{\pi h}{6}(R^2 + r^2 + 4r_m^2) = \frac{h}{6}(B + b + 4S_m),$$

unde r_m, S_m reprezintă raza, respectiv aria secţiunii în T la distanţa $\frac{h}{2}$ de la baza mare (fig. VII.23).

Rezolvare. Deoarece $(2r_m)^2 = (R + r)^2 = R^2 + r^2 + 2Rr$, avem $Rr = \frac{1}{2}(4r_m^2 - R^2 - r^2)$; înlocuind în formula (7) se obţine formula (8).

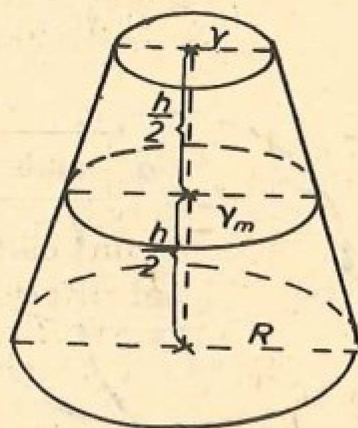


Fig. VII.23.

Exerciţii

4. Aria laterală a unui trunchi de con circular drept este egală cu 225π, generatoarea 25, iar înălţimea 24. Să se calculeze volumul trunchiului de con.

5. Un trunchi de con circular drept are razele bazelor 9 şi 15, iar generatoarea 10. Să se afle aria laterală şi volumul conului din care provine trunchiul de con.

6. Într-un trunchi de con circular drept, raportul ariilor bazelor este egal cu 4. Generatoarea are lungimea egală cu a şi este înclinată faţă de planul bazei cu un unghi de 45°. Să se calculeze volumul trunchiului de con.

7. Un trunchi de con circular drept are înălţimea egală cu 10, iar razele bazelor 8 şi 18. La ce distanţă de baza mică trebuie făcută o secţiune printr-un plan paralel cu bazele astfel încît secţiunea făcută să aibă aria media proporţională între ariile bazelor?

8. Într-un con de rotaţie cu raza $R = 5$ şi înălţimea $I = 12$ se face o secţiune paralelă cu baza avînd aria egală cu 4π. Să se calculeze aria laterală şi volumul trunchiului de con format.

9. Razele bazelor unui trunchi de con sînt R şi r; generatoarea formează cu planul bazei mari un unghi de 45°. Să se afle aria laterală şi volumul trunchiului de con.

10. Se dă un hexagon regulat cu latura 4. Să se calculeze aria şi volumul corpului rezultat prin rotirea suprafeţei hexagonale în jurul axei de simetrie ce trece prin mijlocul unei laturi.

11. O suprafaţă trapezoidală dreptunghică $ABCD$ ($BC \perp AB$) se roteşte în jurul unei axe paralele cu BC, la distanţa 3 de la BC, axa fiind în afara trapezului. Dacă $AB = 5$, $AD = 5$ şi $CD = 2$, să se afle aria şi volumul corpului de rotaţie.

§ 4. Sfera

În capitolul IV § 4 am definit sfera

$$\mathcal{S}(O, r) = \{M \mid OM = r\},$$

interiorul sferei

$$\text{Int } \mathcal{S}(O, r) = \{M \mid OM < r\}$$

şi corpul sferic

$$[\mathcal{S}(O, r)] = \mathcal{S}(O, r) \cup \text{Int } \mathcal{S}(O, r) = \{M \mid OM \leq r\}.$$

Se defineşte şi exteriorul unei sfere şi anume:

$$\text{Ext } \mathcal{S}(O, r) = \{Q \mid OQ > r\}.$$

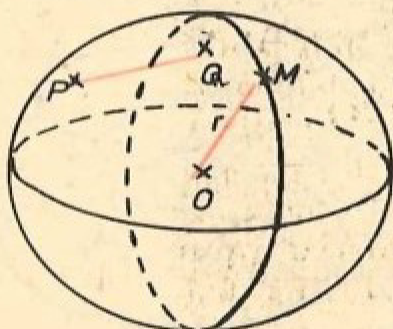


Fig. VII.24.

Dacă $M \in \mathcal{S}(O, r)$, atunci prin raza sferei vom înţelege atît segmentul $[OM]$ cît şi numărul $OM = r$ (fig. VII.24). Dacă P şi Q sînt două puncte pe sfera $\mathcal{S}(O, r)$, atunci segmentul $[PQ]$ se numeşte *coardă* a sferei. O coardă care conţine centrul sferei se numeşte *diametru*. Evident că lungimea fiecărui diametru este egală cu $2r$.

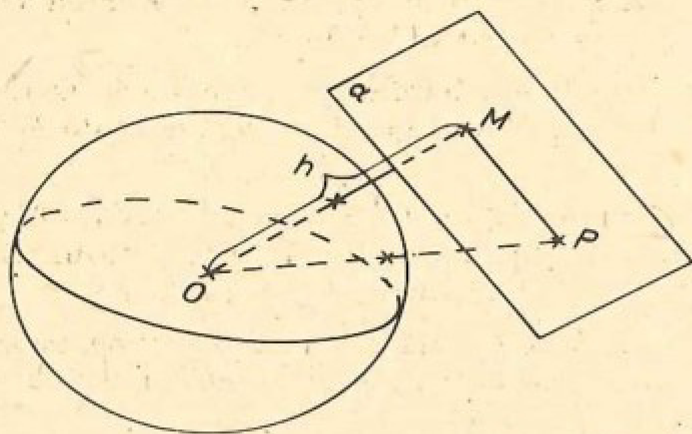


Fig. VII.25.

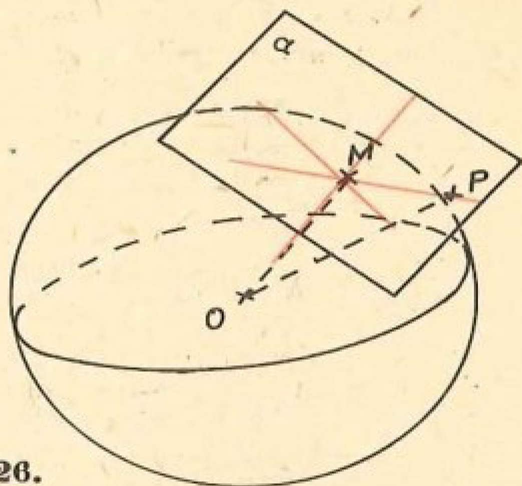


Fig. VII.26.

Pozițiile unui plan față de o sferă

Teorema 1. Fie $\mathcal{S}(O, r)$ o sferă și α un plan, $M = pr_\alpha O$ și $h = d(O, \alpha) = OM$.
a) Dacă $h > r$, atunci planul α și sfera $\mathcal{S}(O, r)$ nu au puncte comune.
b) Dacă $h = r$, atunci planul α și sfera $\mathcal{S}(O, r)$ au exact un punct comun.
c) Dacă $0 < h < r$, atunci planul α și sfera $\mathcal{S}(O, r)$ au în comun un cerc.
d) Dacă $h = 0$, adică $O \in \alpha$, atunci planul α intersectează sfera după un cerc de rază r, *numit cerc mare al sferei*.

Demonstrație. a) Fie $h > r$; pentru orice punct $P \in \alpha$ avem: $OP \geqslant d(O, M) > r$, deci $P \in \text{Ext}\,\mathcal{S}(O, r)$ (fig. VII.25) și

$$\mathcal{S}(O, r) \cap \alpha = \varnothing.$$

b) Fie $h = r$, atunci $M \in \mathcal{S}(O, r)$. Dacă $P \in \alpha$, $P \neq M$, atunci în triunghiul dreptunghic $OMP(OM \perp MP)$ (fig. VII.26) avem: $OP > OM = r$ și deci $P \in \text{Ext}\,\mathcal{S}(O, r)$. Așadar $\mathcal{S}(O, r) \cap \alpha = \{M\}$.

c) Fie $h < r$; notăm $a = \sqrt{r^2 - h^2}$. Dacă $P \in \mathcal{C}(M, a, \alpha)$, atunci $OP = \sqrt{h^2 + a^2} = \sqrt{h^2 + r^2 - h^2} = r$, deci $P \in \mathcal{S}(O, r)$. Așadar, toate punctele cercului $\mathcal{C}(M, a, \alpha)$ aparțin intersecției $\mathcal{S}(O, r) \cap \alpha$ (fig. VII.27). Fie acum Q un punct comun planului α și sferei $\mathcal{S}(O, r)$. Atunci avem $OQ = r$ și $MQ = \sqrt{OQ^2 - OM^2} = \sqrt{r^2 - h^2} = a$, deci $Q \in \mathcal{C}(M, a, \alpha)$. Așadar $\mathcal{S}(O, r) \cap \alpha = \mathcal{C}(M, a, \alpha)$. Cercul $\mathcal{C}(M, a, \alpha)$ se numește *secțiunea făcută de plan în sfera* $\mathcal{S}(O, r)$.

d) Dacă $h = d(O, \alpha) = 0$ atunci $M = O$, deci $O \in \alpha$, și planul α intersectează sfera după un cerc al cărui centru este centrul sferei O și a cărui rază este, deci, raza sferei (fig. VII.28).

Un plan α se numește respectiv *secant*, *tangent* sau *exterior* sferei

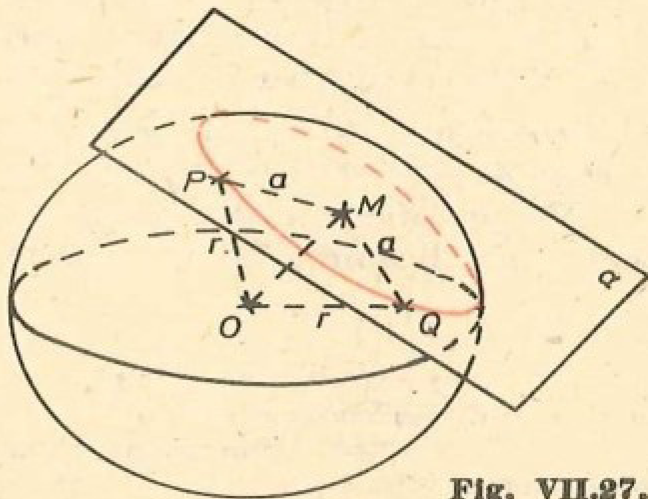


Fig. VII.27.

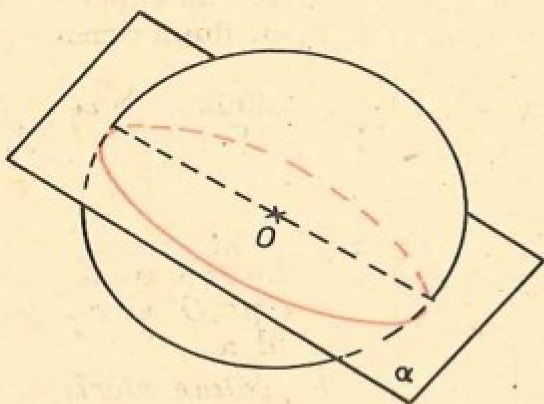


Fig. VII.28.

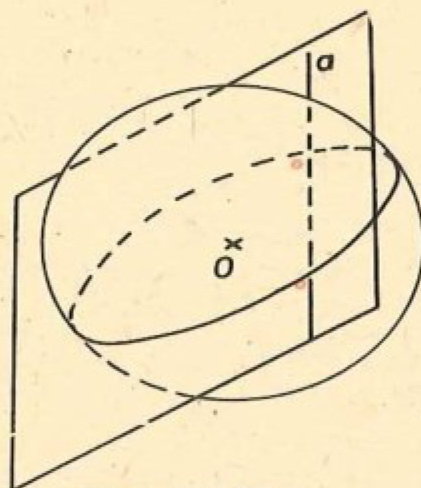


Fig. VII.29.

după cum planul α intersectează sfera într-un cerc, într-un singur punct sau în nici un punct.

Din demonstrația punctului b) a teoremei 1 rezultă că:

Observație. Orice plan tangent la o sferă este perpendicular pe rază în punctul de tangență.

Pozițiile unei drepte față de o sferă

Teorema 2. Fiind date sfera $\mathcal{S}(O, r)$ **și dreapta** a, **se notează** $M = pr_a O$ **și** $h = d(O, a) = OM$.

a) **Dacă** $h > r$, **atunci dreapta** a **și sfera** $\mathcal{S}(O, r)$ **nu au puncte comune** (dreapta a este *exterioară* sferei).

b) **Dacă** $h = r$, **atunci dreapta** a **și sfera** $\mathcal{S}(O, r)$ **au exact un punct comun** (dreapta a este *tangentă* sferei).

c) **Dacă** $0 < h < r$ **atunci dreapta** a **și sfera** $\mathcal{S}(O, r)$ **au exact două puncte comune** (dreapta a este *secantă*).

Demonstrație. Intersecția planului (Oa) cu sfera $\mathcal{S}(O, r)$ fiind un cerc de rază r, teorema 2 revine la teorema analoagă învățată la cerc (manual cl. a IX-a „Poziția unei drepte față de un cerc") (fig. VII.29). Din teorema 2 rezultă că dreapta a este tangentă la sfera $\mathcal{S}(O, r)$ dacă și numai dacă $d(O, a) = r$. Punctul comun tangentei și sferei se numește *punct de tangență* sau *punct de contact*. Din teorema 2 rezultă de asemenea:

Observație. Fiecare tangentă la sferă este perpendiculară pe raza dusă în punctul de tangență M, deci aceste tangente sînt incluse în planul tangent în punctul M (fig. VII.26).

Corpul sferic îl putem defini și prin rotația unui semidisc în jurul diametrului care îl mărginește, iar sfera se obține prin rotația unui semicerc.

Exerciții

1. Să se arate că un corp sferic este o mulțime convexă, iar exteriorul unei sfere nu este o mulțime convexă.

2. Să se arate că simetricul oricărui punct al sferei $\mathcal{S}(O, r)$ față de centrul O aparține de asemenea sferei $\mathcal{S}(O, r)$.

3. Să se arate că suportul oricărui diametru al sferei este axă de simetrie a sferei.

4. Dacă două cercuri din spațiu neașezate în același plan au două puncte comune există o sferă și numai una care conține cele două cercuri.

5. Prin două puncte distincte de pe sferă, care nu sînt coliniare cu centrul sferei, trece un singur cerc mare al sferei.

Calota și zona sferică

Să considerăm sfera $\mathcal{S}(O, r)$ și un plan α, situat la distanța k de la centrul O ($k < r$). Atunci $\alpha \cap \mathcal{S}(O, r)$ este un cerc de centru $M = \text{pr}_\alpha O$ și rază r_1. Să notăm prin S' și S'' semispațiile închise limitate de planul α.

Intersecțiile $\mathcal{S}(O, r) \cap S'$ și $\mathcal{S}(O, r) \cap S''$ se numesc *calote sferice*. Cercul $\mathcal{C}(M, r_1, \alpha)$ este *baza calotelor* (fig. VII.30). Notînd cu $[P_1P_2]$ diametrul sferei perpendicular pe α, distanțele $MP_1 = r - k$, $MP_2 = r + k$ sînt *înălțimile* calotelor. Dacă $O \in \alpha$, cele două calote se numesc *semisfere*.

Fie α, β două plane paralele care intersectează sfera $\mathcal{S}(O, r)$ după cercurile $\mathcal{C}(M_1, r_1, \alpha)$ și $\mathcal{C}(M_2, r_2, \beta)$. Mulțimea $\mathcal{S}(O, r) \cap [\alpha M_2 \cap [\beta M_1$ (porțiunea din sferă cuprinsă între planele α și β) se numește *zonă sferică* de *baze* $\mathcal{C}(M_1, r_1, \alpha)$ și $\mathcal{C}(M_2, r_2, \beta)$ și *înălțime* $h = M_1M_2$ (fig. VII.31).

Observații. a) Calota și zona sferică sînt de asemenea suprafețe de rotație. Rotind un arc mic de cerc $\widehat{AB}$ în jurul suportului d al unui diametru, se obține o *calotă sferică*, dacă $A \in d$ și o zonă sferică, dacă $\widehat{AB} \cap d = \varnothing$ (fig. VII.32 și VII.33).

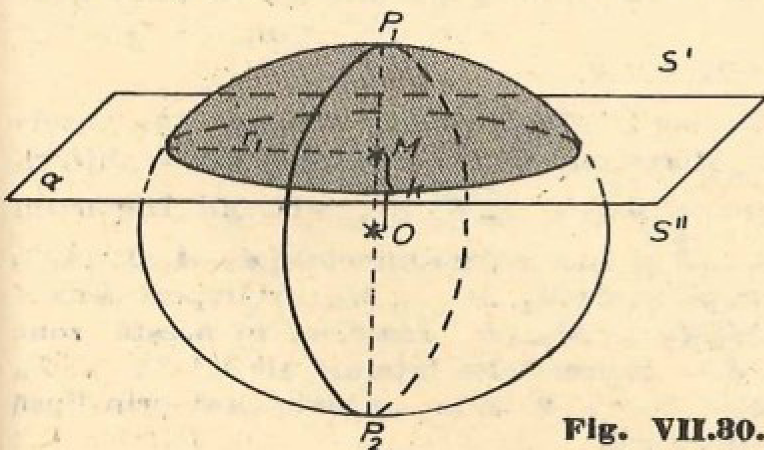


Fig. VII.30.

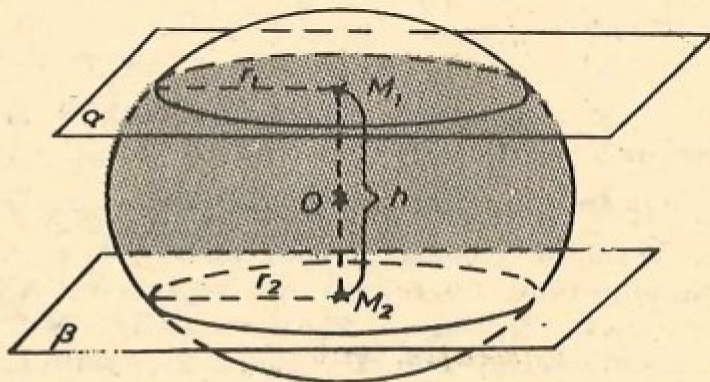


Fig. VII.31.

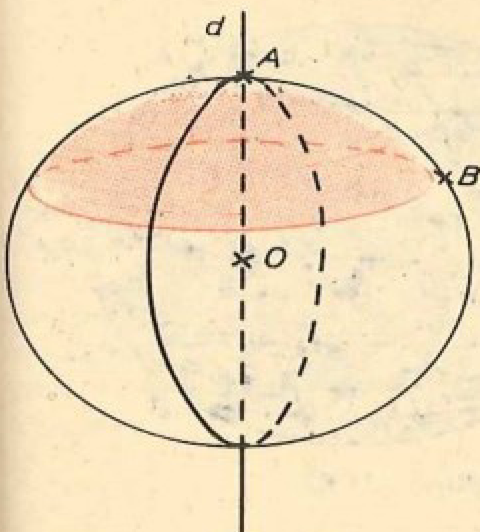


Fig. VII.32.

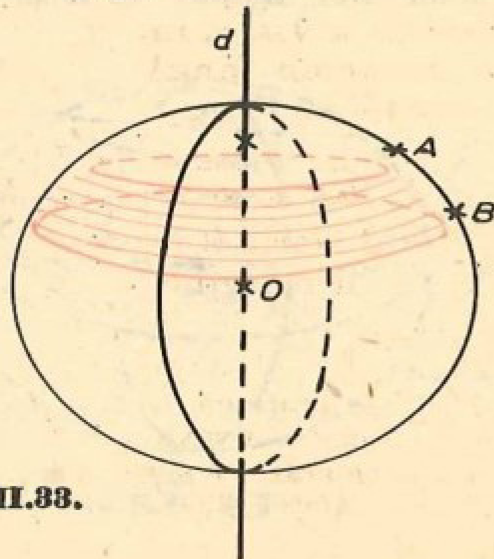


Fig. VII.33.

b) Calota sferică poate fi considerată ca un caz particular de zonă sferică (una din baze se reduce la un punct).

Aria zonei și calotei sferice. Aria sferei

Să considerăm o zonă a sferei $\mathcal{S}(O, r)$ și un trunchi de con circular drept T înscris în zonă (bazele trunchiului de con sînt bazele zonei) (fig. VII.34). Secționînd sfera cu un plan α ce trece prin cele două centre M și N ale bazelor trunchiului de con, deci și prin punctul O, se obține un cerc cu centrul în O; fie $[AB]$ o generatoare a trunchiului de con în planul α. Atunci

(1) $$\sigma_l(T) = \pi \cdot AB \cdot (AM + BN).$$

P și Q fiind mijloacele laturilor $[AB]$ și $[MN]$ ale trapezului dreptunghic $ABNM$, rezultă că

(2) $$AM + BN = 2 \cdot PQ.$$

Înlocuind relația (1) obținem:

(3) $$\sigma_l(T) = 2\pi \cdot AB \cdot PQ.$$

Fie $C = pr_{BN}A$. Din asemănarea triunghiurilor ABC și POQ rezultă că:

$$\frac{AB}{OP} = \frac{AC}{PQ},$$

de unde

$$AB \cdot PQ = OP \cdot AC.$$

Cum $AC = MN$, rezultă că $AB \cdot PQ = OP \cdot MN$. Înlocuind aceasta în relația (3) obținem:

(4) $$\sigma_l(T) = 2\pi \cdot OP \cdot MN.$$

Să considerăm acum sfera $\mathcal{S}(O, r)$ și zona sferică Z de înălțime $h = MN$, cu bazele cercurile $\mathcal{C}(M, AM, \alpha)$ și $\mathcal{C}(N, BN, \beta)$. Zona Z intersectează un cerc mare al sferei $\mathcal{S}(O, r)$, situat într-un plan perpendicular pe α, în arcele $\widehat{AB}$ și $\widehat{A'B'}$ (fig. VII. 35). Împărțim arcul $\widehat{AB}$ în arcele congruente $\widehat{AA_1}, \widehat{A_1A_2}, \ldots, \widehat{A_{n-1}B}$ și ducem prin punctele $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ plane paralele cu α, care taie segmentul (MN) în punctele $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ și împart zona Z în zonele $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ de înălțimi $MM_1, M_1M_2, \ldots, M_{n-1}B$. Înscriem în aceste zone trunchiurile de con $T_1, T_2, \ldots, T_n$; reuniunea S_n a suprafețelor laterale ale lui $T_1, \ldots, T_n$ aproximează zona Z. Vom arăta că ariile $\sigma(S_n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, aproximează prin lipsă un număr unic, numit *aria zonei sferice* și notat cu $\sigma(Z)$.

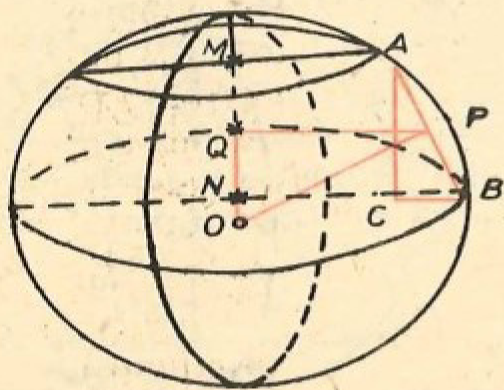


Fig. VII.34.

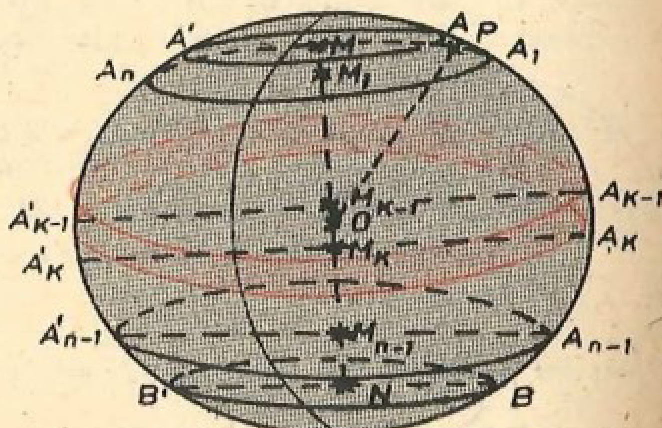


Fig. VII.35.

Notînd cu P_k mijlocul lui $[A_{k-1}A_k]$ şi folosind formula (4), aria laterală a lui T_k se scrie $\sigma_l(T_k) = 2\pi \cdot OP_k \cdot M_{k-1}M_k$ ($M_0 = M$, $M_n = B$). Suma tuturor acestor arii laterale este aria lui S_n:

$$\sigma(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_l(T_k) = 2\pi \sum_{k=1}^{n} OP_k \cdot M_{k-1}M_k.$$

Deoarece arcele $\widehat{A_{k-1}A_k}$ sînt congruente, coardele $(A_{k-1}A_k)$ şi de asemenea segmentele (OP_k) sînt congruente între ele. Aşadar

$$(5) \qquad \sigma(S_n) = 2\pi \cdot OP_1 \cdot \sum_{k=1}^{n} M_{k-1}M_k = 2\pi \cdot OP_1 \cdot MN.$$

Dacă n creşte, distanţa OP_1 aproximează prin lipsă raza r a sferei $\mathcal{S}(O, r)$ cu orice precizie dorită, deci, ţinînd cont de (5), $\sigma(S_n)$ aproximează prin lipsă numărul $2\pi r \cdot MN = 2\pi rh$, de asemenea cu orice precizie dorită. Cu alte cuvinte: *$2\pi rh$ este cel mai mic număr mai mare decît toate ariile aproximative $\sigma(S_n)$*. Aşadar $\sigma(Z) = 2\pi rh$.

Aria zonei sferice se calculează cu formula:

$$\boxed{\text{aria zonei} = 2\pi rh}$$

unde r este raza sferei, iar h înălţimea zonei sferice.

Ţinînd cont că o zonă sferică la care una dintre baze se reduce la un punct devine o calotă sferică, atunci aria calotei se va calcula tot după aceeaşi formulă, adică:

$$\boxed{\text{aria calotei} = 2\pi rh}$$

unde r este raza sferei, iar h este înălţimea calotei.

Aria sferei se obţine imediat considerînd sfera ca o zonă cu înălţimea $h = 2r$. Deci

$$\boxed{\text{aria sferei} = 4\pi r^2}$$

Volumul corpului sferic

Teorema 3. *Dacă raza corpului este r, atunci*

$$\boxed{\text{vol. corp sferic} = \frac{4\pi r^3}{3}}$$

Demonstraţie. Considerăm corpul sferic $\mathcal{S}(O, r)$, cilindrul de rotaţie C de rază r şi înălţimea $2r$, precum şi corpul $C_1 \cup C_2$, unde C_1 şi C_2 sînt conuri de rotaţie congruente, cu aceeaşi axă, cu generatoarele în prelungire, de rază r şi înălţime r. Cele trei corpuri sînt disjuncte şi aşezate pe acelaşi plan α (fig. VII.36). Secţionîndu-le cu un plan $\beta \parallel \alpha$, la distanţa x de O, se obţin trei discuri avînd razele respectiv MN pentru sferă, PQ pentru con şi UV pentru cilindru. Deoarece $MN^2 = r^2 - x^2$, $PQ = x$, $UV = r$, rezultă că $\pi MN^2 + \pi PQ^2 = \pi UV^2$, adică aria secţiunii prin β în $S \cup (C_1 \cup C_2)$, este egală, cu aria secţiunii în C. Aplicînd principiul lui Cavalieri obţinem: $v(S) + v(C_1 \cup C_2) = v(C)$ de unde

$$v(S) = v(C) - v(C_1 \cup C_2) = 2\pi r^3 - 2 \cdot \frac{\pi r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

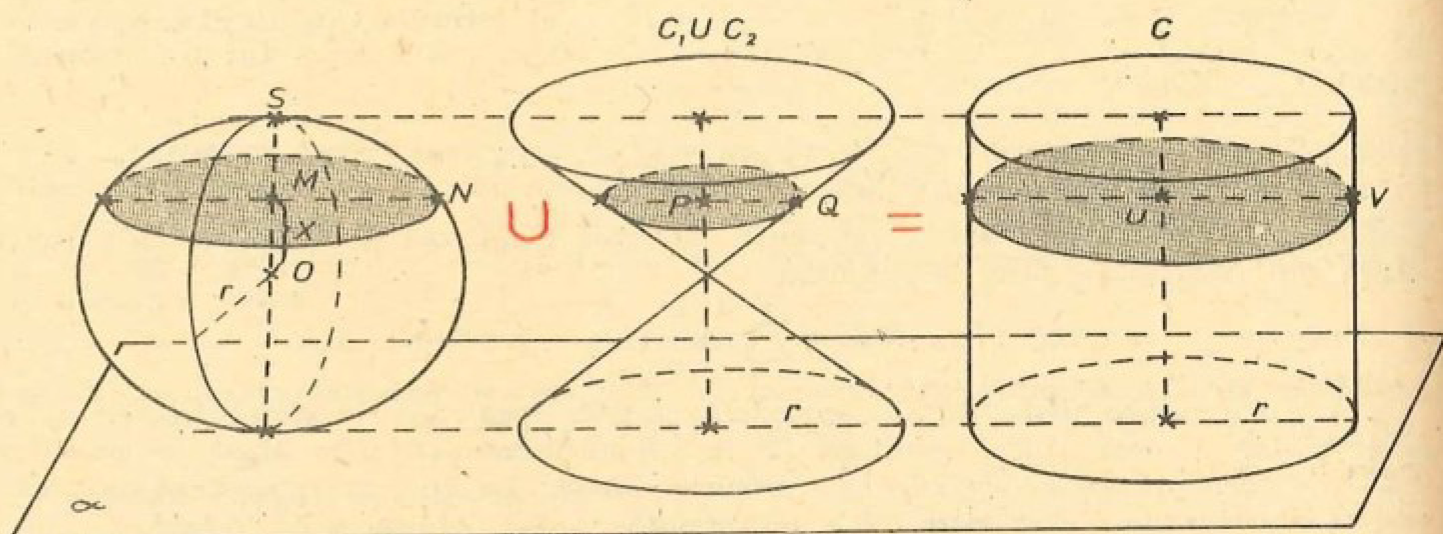


Fig. VII.36

Aplicații. 1. Se observă că $v[\mathcal{S}(O, r)] = \frac{1}{3}\sigma(\mathcal{S}(O, r)) \cdot r$. Acest rezultat este valabil mai general: dacă Σ este o suprafață inclusă în sfera $\mathcal{S}(O, r)$, care are arie, și S reuniunea segmentelor $[OP]$ cu $P \in \Sigma$ (fig. VII.37), atunci

$$v(S) = \frac{\sigma(\Sigma) \cdot r}{3}. \tag{6}$$

Formula (6) poate fi demonstrată aproximînd pe S din interior cu o reuniune de piramide avînd ca vîrf comun punctul O, iar ca baze triunghiuri cu vîrfuri pe Σ.

În cazul cînd Σ este calotă sferică, S se numește *sector sferic* (fig. VII.38), pentru care se obține din (6):

$$\text{vol. sector sferic} = \frac{2\pi r^2 h}{3}. \tag{7}$$

2. Două plane paralele α și β, care intersectează sfera $\mathcal{S}(O, r)$ după cercurile $\mathcal{C}(M_1, r_1, \alpha)$, $\mathcal{C}(M_2, r_2, \beta)$, $(r_1 \geqslant r_2)$, descompun corpul sferic $[\mathcal{S}(O, r)]$ în trei corpuri, numite *segmente sferice* (fig. VII.39 și VII.40). Vom arăta că volu-

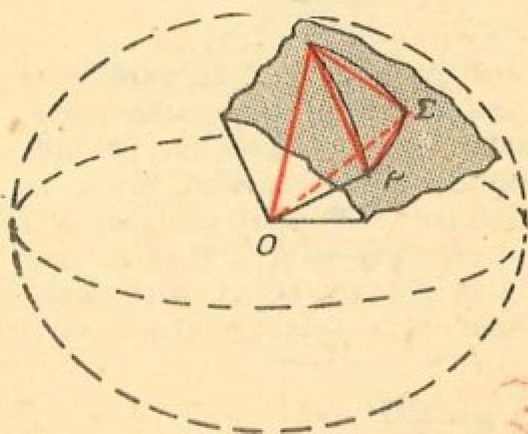


Fig. VII.37

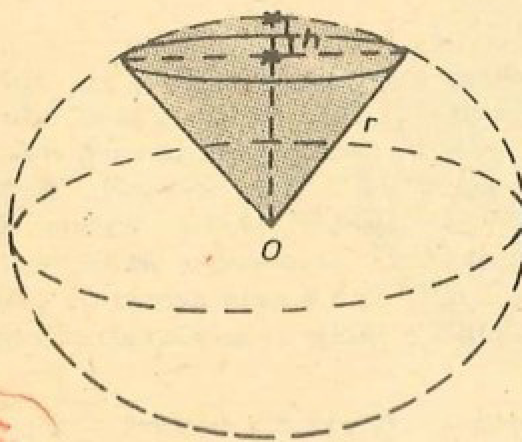


Fig. VII.38

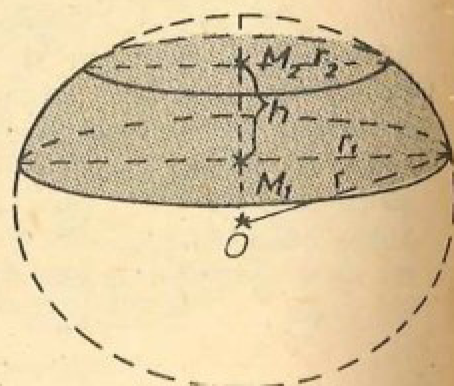


Fig. VII.39

mul V al segmentului sferic se calculează cu aceeaşi formulă (8) de la § 3, pe care am stabilit-o pentru trunchiul de con. Tratăm cazul segmentului sferic $S_{\alpha, \beta}$, cuprins între planele α şi β (pentru cele în exteriorul lui α şi β se ia $r_2 = 0$), şi $M_1 \in (OM_2)$.

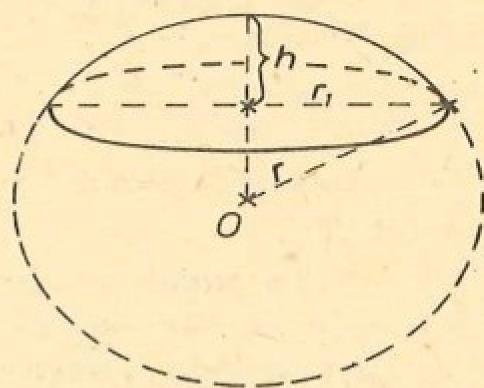


Fig. VII.40

Considerăm părţile corpurilor S, $C_1 \cup C_2$ şi C din demonstraţia teoremei 3 cuprinse între planele α şi β: segmentul sferic $S_{\alpha, \beta}$, trunchiul de con $T_{\alpha, \beta}$ şi cilindrul $C_{\alpha, \beta}$ (fig. VII.41). Între volumele lor V, V', V'' există relaţia: $V = V'' - V'$. Fie $h = M_1M_2$, M_3 mijlocul lui $[M_1M_2]$, $r_m = \mathrm{d}(M_3, M_1M_2)$ şi $x = OM_3$. Secţionînd pe $S_{\alpha, \beta}$, $T_{\alpha, \beta}$, $C_{\alpha, \beta}$ cu un plan $\gamma \parallel \alpha$, care trece prin M_3, se obţin trei discuri de arii πr_m^2, $s' = \pi x^2$, $s = \pi r^2$ şi avem: $s - B' = \pi r_2^2$, $s - b' = \pi r_1^2$, $s - s' = \pi r_m^2$, unde B', b' sînt ariile bazelor lui $T_{\alpha, \beta}$.

Ţinînd cont de formula (8), § 3, rezultă: $V = V'' - V' = hs - \frac{h}{6}(B' + b' + 4s') = \frac{h}{6}[(s - B') + (s - b') + 4(s - s')]$, deci

$$(8) \qquad V = \frac{\pi h}{6}(r_1^2 + r_2^2 + 4r_m^2).$$

Putem găsi o expresie pentru V în funcţie de r_1, r_2 şi h. Din

$$r^2 = r_1^2 + \left(x - \frac{h}{2}\right)^2 = r_m^2 + x^2 = r_2^2 + \left(x + \frac{h}{2}\right)^2$$

se deduce că $4r_m^2 = 2r_1^2 + 2r_2^2 + h^2$ şi avem în final pentru volumul segmentului sferic:

$$(9) \qquad V = \frac{\pi h}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2).$$

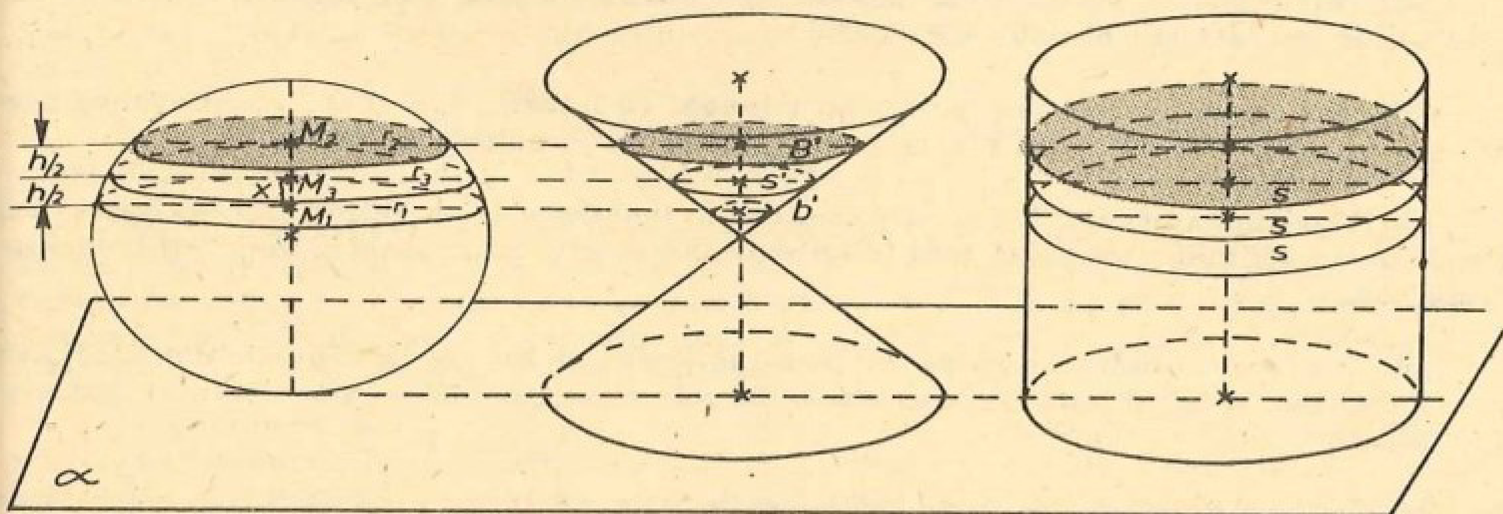


Fig. VII.41

Dacă segmentul sferic se obţine din corpul sferic prin secţionare cu un singur plan (fig. VII.40) $r_2 = 0$ şi

$$V = \frac{\pi h}{6}(3r_1^2 + h^2). \tag{10}$$

Deduceţi formula (10) prin descompunerea sectorului sferic într-un segment sferic şi un con!

3. În cazul altor corpuri de rotaţie (de exemplu butoaie, cisterne etc.) formula (8) serveşte la calcularea *aproximativă* a volumelor. Se obţin aproximaţii bune, dacă corpul se descompune în suficiente părţi prin plane paralele şi formula (8) se aplică separat pentru fiecare parte.

Exerciţii

6. Un corp sferic de rază 6 se secţionează cu un plan α. La ce distanţă de centrul sferei trebuie dus planul α pentru ca aria discului de secţiune să fie egală cu 9π?

7. Să se afle raza unei sfere ştiind că aria sa şi volumul corpului sferic se exprimă prin acelaşi număr.

8. O zonă sferică are razele bazelor 15 şi 8, iar raza sferei este 17. Să se afle aria zonei sferice (în două cazuri).

9. Să se afle muchia unui tetraedru regulat înscris în sfera de rază R.

10. Raza bazei unui con circular drept este egală cu 4 şi înălţimea 3. Să se afle volumul corpului sferic înscris în con.

11. Să se afle muchia unui cub înscris în sfera de rază R.

12. Într-o sferă de rază 10 se înscrie un cilindru circular de înălţime 12. Să se calculeze aria laterală şi volumul cilindrului.

13. Baza unei prisme drepte este un triunghi cu laturile 6, 8 şi 10, iar înălţimea prismei este egală cu 24. Să se afle aria şi volumul sferei circumscrise prismei.

14. Unei sfere de rază R i se circumscrie un trunchi de con. Ştiind că raza bazei mici este de patru ori mai mică decît raza bazei mari, să se afle aria totală şi volumul trunchiului de con.

15. Dintr-un cilindru de metal în care înălţimea şi lungimea diametrului bazei sînt egale cu 20 cm, se strunjeşte un corp sferic de volum maxim. Să se afle volumul materialului pierdut.

16. Un con circular drept are înălţimea egală cu h şi este înscris într-o sferă $\mathcal{S}$ de rază R. a) Să se calculeze în funcţie de R şi h volumul V şi aria laterală S a conului.

b) Să se arate că $\frac{V}{S^2}$ nu depinde de h. c) Se consideră calota sferei $\mathcal{S}$, care are aceeași bază ca și conul și nu conține vîrful conului. Să se calculeze aria calotei și să se determine apoi h astfel încît aria laterală a conului să fie egală cu aria calotei.

Exerciții recapitulative

1. Diagonala secțiunii axiale a unui cilindru echilater (secțiunea axială este un pătrat) este egală cu a. Să se afle volumul prismei octogonale regulate înscrise în acest cilindru.

2. Într-un cilindru circular drept de rază a și generatoare b este înscrisă o prismă triunghiulară regulată, iar în prismă este înscris un cilindru. Să se afle raportul volumelor celor doi cilindri.

3. Să se calculeze raza cercului de bază și generatoarea cilindrului circular drept a cărui arie totală este jumătate din aria sferei în care poate fi înscris.

4. Să se afle la ce distanță de vîrful unui con, cu raza bazei 4 și înălțimea 5, trebuie să ducem un plan paralel cu baza pentru ca acest con să fie împărțit în două părți de același volum.

5. Se dă un con circular drept în care α este măsura unghiului format de înălțime cu generatoarea, iar r este raza sferei înscrise în con. a) Să se exprime în funcție de α și r aria laterală a conului. b) Să se determine α astfel încît această arie să fie egală cu $3\pi r^2 (\sin \alpha)^{-1}$.

6. Într-un vas în formă de con circular drept, cu înălțimea de 6 dm, cu vîrful în jos, se toarnă 150,72 l de apă. Apa se urcă în vas pînă la 4 dm. Să se afle capacitatea vasului întreg.

7. Un con circular drept, care are raza bazei R și înălțimea $I = 2R$, se taie cu un plan paralel cu planul bazei determinînd astfel un trunchi de con de înălțime d. a) Să se calculeze volumul trunchiului de con în funcție de R și d. b) Să se determine d în funcție de R astfel ca în acest trunchi de con să se poată înscrie o sferă.

8. Să se afle aria totală și volumul corpului obținut prin rotația unei suprafețe hexagonale regulate în jurul suportului unei laturi, știind că latura hexagonului este egală cu a.

9. Să se calculeze aria laterală și volumul unui trunchi de con știind că raza bazei mari este egală cu $R\sqrt{3}$ și că în trunchiul respectiv se poate înscrie o sferă de rază R.

10. În trapezul $ABCD$, cu bazele $[AB]$ și $[DC]$, diagonalele $[AC]$ și $[BD]$ se intersectează în O. a) Cunoscînd $AB = a$, $DC = b (a > b)$ și înălțimea h a trapezului, să se calculeze distanțele de la punctul O la cele două baze. b) Fie V_1 și V_2 volumele corpurilor obținute prin rotația suprafeței trapezoidale $ABCD$ în jurul bazelor DC respectiv AB Care dintre cele două volume este mai mare?

11*. O sferă de centru O și de rază R este secționată de două plane paralele α și β situate la distanța h unul de altul. Să se afle distanța de la centrul sferei la planul α astfel încît aria zonei sferice dintre cele două plane să fie egală cu suma ariilor secțiunilor plane. Discuție.

12. a) La ce distanță de centrul unei sfere S de rază R trebuie dus un plan astfel ca aria calotei mici, ce se formează, să fie egală cu aria laterală a conului circular drept, avînd ca bază cercul de intersecție al planului cu sfera și vîrful pe calota mare? b) Să se afle raportul dintre volumul conului și volumul corpului sferic $[S]$.

13. Într-un trapez isoscel $ABCD$ un unghi ascuțit este de 45°, iar latura oblică este congruentă cu baza mică $[CD]$.

a) Dacă $AD = 10$, să se afle lungimea diagonalei $[BD]$.

b) Să se afle volumul corpului obținut prin rotația suprafeței trapezoidale $[ABCD]$ în jurul dreptei AB.

14. Un con de rotație are raza bazei R și înălțimea h. Să se înscrie în el un cilindru de arie totală maximă.

Probleme recapitulative

1. Să se arate că un poligon convex nu poate avea mai mult de trei unghiuri ascuţite.

2. Fie ABC un triunghi. Să se găsească locul geometric al punctelor $M \in (ABC)$ pentru care $\sigma[ABM] = \sigma[ACM]$.

3. Se dă un patrulater convex $ABCD$. Să se afle locul geometric al punctelor $M \in \text{Int } ABCD$ pentru care $\sigma[MBCD] = \sigma[MBAD]$.

4. Să se determine o dreaptă MN, paralelă cu bazele unui trapez $ABCD$ ($M \in (AD)$, $N \in (BC)$), astfel încît diferenţa ariilor lui $[ABNM]$ şi $[MNCD]$ să fie egală cu un număr dat.

5. Pe laturile triunghiului ABC se iau punctele D, E, F astfel ca $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = 2$. Să se afle raportul ariilor triunghiurilor DEF şi ABC.

6. Laturile neparalele ale unui trapez circumscris unui cerc formează cu baza mare unghiuri de măsură α respectiv β. Să se afle raza cercului, ştiind că aria trapezului este S.

7. Se consideră un triunghi echilateral ABC şi discul $\left[\mathcal{C}\left(O, \frac{a}{3}\right)\right]$, unde O este ortocentrul triunghiului şi $a = AB$. Să se determine aria suprafeţei $[ABC] - \left[\mathcal{C}\left(O, \frac{a}{3}\right)\right]$.

8. Să se arate că în orice triunghi ABC:

a) $1 + \cos A \cos (B - C) = \frac{b^2 + c^2}{4R^2}$;

b) $(b^2 + c^2 - a^2) \operatorname{tg} A = 4S$; $\mu(\hat{A}) \neq \frac{\pi}{2}$

c) $\frac{b + c}{2c \cos \frac{A}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{A}{2} + C\right)}{\sin (A + B)}$;

d) $p = r\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)$;

e) $\operatorname{ctg}\frac{A}{2} \operatorname{ctg}\frac{B}{2} \operatorname{ctg}\frac{C}{2} = \frac{p}{r}$.

9*. Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

a) $a \operatorname{ctg} A + b \operatorname{ctg} B + c \operatorname{ctg} C = 2(R + r)$;

b) $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \dfrac{p}{R + r}$.

10. Se dau dreptele de ecuaţii $y = x + b - a$, $y = 2x + b - 2a$ şi $y = 3x + b - 3a - 2$, unde $a, b \in \mathbf{R}$. Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului determinat de punctele lor de intersecţie.

11. Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC, să se arate că:

a) $AH = 2R \cos A$,

b) $a\,AH + b\,BH + c\,CH = 4S$.

12*. Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, iar I centrul cercului înscris, să se arate că

$$OI^2 = R(R - 2r).$$

13*. Să se arate că în orice triunghi ABC,

$$\cos^2 \frac{B - C}{2} \geqslant \frac{2r}{R}.$$

14. Să se calculeze $z^n + \dfrac{1}{z^n}$, ştiind că $z + \dfrac{1}{z} = 2 \sin a$.

15. Să se rezolve ecuaţia $z^n + z^{n-1} + \ldots + z + 1 = 0$.

16. Să se rezolve ecuaţia: $(z + 1)^n - (z - 1)^n = 0$.

17. Să se demonstreze că dacă $|z| < \dfrac{1}{2}$, atunci

$$|(1 + i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}.$$

18*. Se dau dreptele d şi d'. Să se arate că prin fiecare punct al spaţiului trece o dreaptă perpendiculară pe d şi pe d'.

19*. Se dau dreptele d, d' nesituate în acelaşi plan şi punctele $A \in d$, $B \in d'$. Să se afle locul geometric al punctelor M pentru care $\mathrm{pr}_d M = A$ şi $\mathrm{pr}_{d'} M = B$.

20*. Să se găsească locul geometric al punctelor din interiorul unui unghi triedru $\widehat{abc}$ egal depărtate de muchiile lui a, b, c.

21*. Fie $\widehat{abc}$ un unghi triedru cu $\widehat{ab} = \widehat{ac}$. Să se arate că planul bisector al unghiului diedru determinat de feţele care conţin muchia a, este perpendicular pe planul feţei opuse.

22*. Să se construiască o dreaptă care să intersecteze două drepte date şi să fie perpendiculară pe o altă dreaptă dată.

23*. Fiind date punctele A, B, situate de aceeaşi parte a unui plan, să se afle în acest plan punctul pentru care suma distanţelor sale la A şi B este minimă.

24*. Pe una din muchiile unui unghi triedru se dă punctul A. Să se construiască pe celelalte muchii cîte un punct M, N astfel încît suma $AM + MN + NA$ să fie minimă.

25*. Cîte muchii ale unei piramide pentagonale pot fi intersectate de un plan?

26*. Printr-o dreaptă dată să se ducă un plan pe care proiecțiile a două drepte date să fie paralele.

27. Se consideră un tetraedru $[ABCD]$ și centrele de greutate L, M, N ale triunghiurilor BCD, CAD, ABD. a) Să se arate că $(ABC) \parallel (LMN)$. b) Să se afle raportul dintre $\sigma[ABC]$ și $\sigma[LMN]$.

28. Se consideră un cub $[ABCDA'B'C'D']$. Punctul A se proiectează pe $A'B$, $A'C$, $A'D$ respectiv în A_1, A_2, A_3. Să se arate: a) $A'C \perp (A_1A_2A_3)$; b) $AA_1 \perp A_1A_2$, $AA_3 \perp A_3A_2$; c) $AA_1A_2A_3$ este un patrulater inscriptibil.

29. Se consideră triunghiurile dreptunghice BAC și ABD ($m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ADB}) = 90°$), situate în plane perpendiculare. M, N fiind mijloacele segmentelor $[AB]$, $[CD]$, să se arate că $MN \perp CD$.

30*. Să se demonstreze că semiplanul bisector al unui unghi diedru într-un tetraedru împarte muchia opusă în segmente proporționale cu ariile fețelor alăturate.

31. Fie A un vîrf al unui tetraedru regulat și P, Q două puncte pe suprafața lui. Să se arate că $m(\widehat{PAQ}) \leqslant 60°$.

32*. Să se arate că suma măsurilor unghiurilor diedre ale unui tetraedru este mai mare decît 360°.

33*. Se consideră dreptele paralele d_1, d_2, conținute într-un plan α și o dreaptă AB care intersectează planul α în punctul C. O dreaptă variabilă, inclusă în α și trecînd prin C, taie d_1, d_2 respectiv în M, N. Să se afle locul geometric al intersecției $AM \cap BN$. În ce caz locul geometric este mulțimea vidă?

34. Un plan α intersectează laturile $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ ale unui tetraedru $[ABCD]$ în punctele L, M, N, P. Să se demonstreze că $AL \cdot BM \cdot CN \cdot DP = BL \cdot CM \cdot DN \cdot AP$.

35*. Dintr-un punct A exterior unui plan α se duce perpendiculara AO, $O \in \alpha$ și se iau $B, C \in \alpha$. Fie H, H_1 respectiv ortocentrele triunghiurilor ABC, OBC, AD și BE înălțimi în triunghiul ABC, iar BE_1 înălțime în triunghiul OBC. Să se arate:

a) $HH_1 \perp (ABC)$; b) $\frac{OA}{AD} \cdot \frac{DH_1}{H_1B} \cdot \frac{BE}{EE_1} = 1$.

36*. Se dă un tetraedru $[ABCD]$ în care $AB \perp CD$ și $AC \perp BD$. Să se arate: a) $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 = CA^2 + BD^2$; b) mijloacele celor șase muchii se află pe o sferă.

37. Se dă o prismă triunghiulară $[ABCA'B'C']$ care are fețele laterale pătrate. Fie M un punct mobil pe $[AB]$, N proiecția lui M pe (BCC') și A'' mijlocul lui $[B'C']$. Să se arate că $A'N$ și MA'' se intersectează într-un punct P și să se afle locul geometric al lui P.

38. Fie tetraedrul $[ABCD]$ și G centrul de greutate al triunghiului BCD. Să se arate că dacă $M \in AG$ atunci $v[MGBC] = v[MGCD] = v[MGDB]$.

39. Se consideră punctul M aparținînd interiorului unui triedru tridreptunghic de vîrf O. Să se ducă prin M un plan care să intersecteze muchiile triedrului respectiv în puncte A, B, C astfel ca M să fie ortocentrul triunghiului ABC.

40. O grămadă de nisip are drept baze două dreptunghiuri situate în plane paralele și fețele laterale trapeze. Să se găsească volumul grămezii cunoscînd dimensiunile a, b ale bazei mari, a', b' ale bazei mici și h distanța dintre cele două baze.

41. Se dă un trunchi de piramidă de înălțime h și ariile bazelor B și b. Se unește un punct oarecare O al bazei mari cu vîrfurile A, B, A', B' ale unei fețe laterale. a) Să se arate că $v[OA'B'A] = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}} \cdot v(OABB')$. Să se determine cu ajutorul relației de mai sus formula volumului trunchiului de piramidă.

42*. Să se demonstreze că dacă într-un tetraedru ariile fețelor sînt egale, atunci fiecare muchie este congruentă cu muchia opusă.

43. O prismă triunghiulară regulată este circumscrisă unei sfere de rază R. Să se afle aria și volumul prismei.

44. Un triunghi dreptunghic cu catetele respective b și c, iar ipotenuza a se rotește pe rînd în jurul ipotenuzei și al celor două catete. V_1, V_2, V_3; S_1, S_2, S_3 fiind volumele respectiv ariile laterale ale celor trei corpuri formate, să se arate:

a) $\frac{1}{V_1^2} = \frac{1}{V_2^2} + \frac{1}{V_3^2}$, b) $\frac{S_2}{S_3} + \frac{S_3}{S_2} = \frac{S_2 + S_3}{S_1}$.

45. Un coș de fabrică are forma unui trunchi de con cu înălțimea de 10 m, bazele trunchiului de con au lungimile exterioare de 3,14 m și 1,57 m, grosimea zidului fiind de 18 cm. Să se calculeze volumul coșului.

46. Într-o sferă de rază R se înscrie o piramidă regulată cu baza un pătrat și cu unghiul de la vîrful unei fețe laterale de măsură α. Să se afle: a) volumul piramidei înscrise, b) aria laterală și totală a piramidei, c) valoarea α, cînd înălțimea piramidei este egală cu raza sferei.

47. Un trunchi de con are aria laterală egală cu $4\pi a^2$ și înălțimea a, iar generatoarea sa este egală cu suma razelor bazelor. Să se calculeze în funcție de a razele bazelor și aria laterală a conului din care face parte trunchiul de con.

48. Fiind date punctele distincte A și B, să se afle locul geometric al punctelor M din spațiu pentru care $AM \perp BM$.

49. Să se arate că dacă trei sfere au un cerc comun, atunci centrele lor sînt coliniare.

50. Să se găsească locul geometric al centrelor sferelor care trec prin: a) două puncte date, b) trei puncte date.

51. Să se afle locul geometric al centrelor sferelor de rază dată tangente la o dreaptă dată.

52. Fie C un cerc situat pe sfera S și $A \in C$. Să se arate că tangenta la cercul C în punctul A este inclusă în planul tangent la sfera S în A.

53. Un plan paralel cu baza piramidei $[VABC]$ taie muchiile laterale în A', B', C'. Să se arate că sferele circumscrise tetraedrelor $[VABC]$ și $[VA'B'C']$ sînt tangente.

54. Să se arate că raza sferei înscrise într-un tetraedru se calculează cu formula

$$r = \frac{3V}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4},$$

unde S_1, S_2, S_3, S_4 sînt ariile fețelor, iar V volumul tetraedrului.

55. Se rotește un triunghi ABC în jurul tangentei în A la cercul circumscris. Să se exprime aria suprafeței descrise de $[BC]$ în funcție de $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

56. Un con circular drept cu generatoarea a, are trei generatoare perpendiculare două cîte două. Să se afle: a) volumul conului, b) aria sferei înscrisă în acest con, c) raportul ariilor calotelor determinate de cercul de tangență al sferei cu conul.

57. Două sfere de centre O și O_1 și raze R și R_1 $(R_1 < R)$ sînt tangente exterior. Să se afle aria laterală a trunchiului de con ce are ca baze cercurile de tangență cu cele două sfere ale conului circumscris sferelor.

58*. Patru sfere de aceeași rază r, sînt tangente două cîte două. Să se afle înălțimea h a conului de rotație circumscris celor patru sfere.

59*. O mărgea se obține dintr-un corp sferic prin perforare cu un burghiu al cărui ax trece prin centrul sferei. Să se afle volumul mărgelei, știind că gaura obținută are lungimea h.

Indicații și răspunsuri

Capitolul I

§ 1.

2. $(n-2)\cdot 180° = n\cdot 135°$; $n = 8$. **3.** $n\cdot 180° - (n-2)\cdot 180° = 360°$. **4.** 10. **5.** 3.

§ 3.

2. Triunghiul dreptunghic. **4.** a) $\sigma[AOD]+\sigma[AOB]=\sigma[BOC]+\sigma[AOB]$. b) $\sigma[AOD] = MO\cdot h = \sigma[BOC]=ON\cdot h$, unde h este înălțimea trapezului. **6.** Paralela prin D la laturile unghiului BAC taie AB în E și AC în F; MN va fi paralelă cu EF. **7.** P este centrul de greutate al triunghiului ABC. **8.** Se consideră punctele M, $N\in(AB)$ astfel că $M\in(AN)$. Paralelele prin M și N la BC intersectează latura (AC) în M' și N'. Se notează $\frac{AM}{AB}=x$, $\frac{AN}{AB}=y$ și se pune condiția ca cele două paralele să descompună suprafața triunghiulară $[ABC]$ în trei suprafețe de arii egale; deci $\frac{\sigma[AMM']}{\sigma[ABC]}=\frac{1}{3}=x^2$, $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ și analog, $y=\sqrt{\frac{2}{3}}$. **9.** Fie trapezul $ABCD$, $AB\parallel DC$, $\{O\}=AD\cap BC$, $D\in(OA)$, $a=OD$, $b=OA$ și MM', NN' dreptele cerute. $OM^2 = \frac{1}{3}(2a^2+b^2)$, $ON^2=\frac{1}{3}(a^2+2b^2)$.

§ 4.

6. Dacă $C\in\widehat{AD}$, $\mu(\widehat{AC})=\mu(\widehat{DB})=\alpha$ și $OA=r$, atunci $\sigma[EF\widehat{DC}]=\frac{1}{2}\cdot\frac{r^2}{2}(\pi - 2\alpha+\sin 2\alpha)-\frac{1}{2}\cdot\frac{r^2}{2}(2\alpha+\sin 2\alpha)=\frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\frac{r^2}{2}\mu(\widehat{CD})=$ aria sectorului $[\widehat{OCD}]$.

Exerciții recapitulative

2 $2\sqrt{2}r^2$. **5.** $\sigma[BCN]=\sigma[DCM]+\sigma[ABM]$. **6.** $\frac{1}{6}$.

§ 1.

1. a) $\left(10,\ 2\pi - \arcsin\frac{4}{5}\right)$, b) $\left(5,\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$, c) $\left(5,\ \frac{3\pi}{2}\right)$, d) $\left(2,\ \frac{\pi}{3}\right)$, e) $\left(\sqrt{5},\ \pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$, f) $(3,\ \pi)$, **2.** a) $(1, \sqrt{3})$, b) $\left(\frac{60}{13}, -\frac{25}{13}\right)$, c) $\left(-\frac{7}{2}, -\frac{7\sqrt{3}}{2}\right)$, d) $(-5,\ 0)$ **3.** $\left(2,\ \arcsin\frac{3}{5}\right)$, $\left(2,\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$.

§ 2.

1. b) Membrul stîng al egalității se scrie sub forma $\frac{m}{2}\cdot(\sin 2B + \sin 2C)$, unde $m = \frac{a}{\sin A}$. **2.** a) Se exprimă $\cos B$ și $\cos C$ din teorema cosinusului. **4.** Aplicînd teorema sinusurilor se ajunge la $\cos\frac{A-C}{2} = \cos\frac{B}{2} \Leftrightarrow \frac{A-C}{2} = \frac{B}{2}$ sau $\frac{A-C}{2} = -\frac{B}{2}$. **5.** $\operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc\sin A} = \frac{m(b^2 + c^2 - a^2)}{2abc}$ unde $m = \frac{a}{\sin A}$.

§ 3.

1. a) $b = 15, C = \arccos\frac{3}{5}, A = \arccos\frac{33}{65}$; b) $B = \pi - \arccos\frac{5}{13}$, $a = 4$, $c = 13$; c) $A = \pi - \arccos\frac{5}{13}$, $B = \arccos\frac{63}{65}$, $C = \arccos\frac{3}{5}$; d) $b = 4 + 3\sqrt{3}$, $A = \frac{\pi}{6}$, $B = \frac{\pi}{3} + \arccos\frac{3}{5}$; e) $c_1 = \sqrt{3}+1$, $\widehat{B}_1 = \frac{\pi}{4}$, $\widehat{C}_1 = \frac{7\pi}{12}$, $c_2 = \sqrt{3}-1$, $\widehat{B}_2 = \frac{3\pi}{4}$, $\widehat{C}_2 = \frac{\pi}{12}$; f) $a_1 = 5$, $b_1 = 7$, $c_1 = 2\sqrt{10} + 4$; $a_2 = 5$, $b_2 = 7$, $c_2 = 2\sqrt{10} - 4$; g) Problema nu are soluție. **2.** a) $C = \pi - A - B$, $a = \frac{2p\sin A}{\sin A + \sin B + \sin C}$ etc. **4.** $B = \frac{7\pi}{12}$, $C = \frac{\pi}{12}$. **5.** $DB = 14$, $\cos\widehat{CDB} = \frac{5}{13}$, $\mu(\widehat{ADB}) = \frac{\pi}{4}$, $AB = 14(\sqrt{3} - 1)$, $A = \frac{7\pi}{12}$, $B = \frac{\pi}{6} + \arccos\frac{3}{5}$.

§ 4.

1. a) $\sin A = \frac{204}{325}$, $S = 204$; b) $S = 1 + \sqrt{3}$; c) $S = 6\sqrt{6}$; d) $A = \frac{\pi}{10}$. Se observă că $\sin 2A = \cos 3A$, de unde $\sin A = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$; $S = 3(\sqrt{5} - 1)$. **2.** $a_1 = 15$, $b_1 = 4$, $c_1 = 13$; $a_2 = 15$, $b_2 = 2\sqrt{193}$, $c_2 = 13$. **3.** $\cos\frac{B-C}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

de unde $B - C = \frac{\pi}{6}$, deci $m(\hat{B}) = 75°$ și $m(\hat{C}) = 45°$. Se găsește $S = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{3})$. **4.** $35 + 49\sqrt{3}$. **5.** $S_3 = \frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$, $S_4 = 2R^2$, $S_6 = \frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$, $S_8 = 2R^2\sqrt{2}$, $S_{12} = 3R^2$, $S_{20} = 10\ R^2 \sin\frac{\pi}{10} = \frac{5}{2}R^2(\sqrt{5} - 1)$ (vezi exercițiul 1.d). **6.** Dacă $\mu(\widehat{AOB}) = 2\alpha$, O fiind centrul cercului circumscris poligonului, egalitatea dată se scrie $\frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\sin 3\alpha}$, care se transformă în $\sin 3\alpha = \sin 4\alpha$. Se obține $\alpha = \frac{\pi}{7}$, iar aria cerută este $S_7 = \frac{7}{2}R^2 \sin\frac{2\pi}{7}$.

§ 5.

1. a) Dacă $A' \in BC, B' \in AC, C' \in AB$ sînt punctele de tangență ale cercului înscris respectiv cu laturile triunghiului și dacă $x = AB'$, $y = BC'$, $z = CA'$, atunci $x + y = c$, $y + z = a$, $z + x = b$. Se obțin: $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$. Relația rezultă din triunghiul dreptunghic $AB'I$ unde I este centrul cercului înscris. c) Se calculează $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ cu formulele (3), § 3 și se ține cont de (4). d) $p - a = \frac{r}{\text{tg}\frac{A}{2}}$ conform cu a). e) Se utilizează relația medianei $4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$ și teorema sinusurilor. **2.** Se aplică teorema sinusurilor în triunghiul AIB. **3.** Se alege un reper ca în figura II.4. Mediatoarele segmentelor $[AB]$ și $[AC]$ au ecuațiile $2x = c$, $2y \sin A + 2x \cos A = b$. Se obțin coordonatele lui O prin rezolvarea sistemului și apoi $R = OA$.

Exerciții recapitulative

1. Dacă $a > b$, din $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} > 1$, rezultă $\sin A - \sin B > 0$, $\sin\frac{A - B}{2} > 0$, $A > B$. **2.** a) Se elimină a, b în membrul stîng cu ajutorul teoremei sinusurilor și se obține $\frac{\sin 2A - \sin 2B}{2\sin(A - B)} + \cos C = \cos(A + B) + \cos C = 0$. c) Se scrie membrul stîng sub forma $c\cos\frac{B}{4} + a\cos\left(B - \frac{3B}{4}\right) + b\cos\left(A + \frac{3B}{4}\right)$. **3.** Se calculează BC cu ajutorul teoremei cosinusului, apoi $\cos B$ și $\sin B$. **4.** Dacă $A' \in BC$, $B' \in AC$, $C \in AB$ se calculează $\sigma[B'C'I] = \frac{r^2 \sin A}{2} = \frac{ar^2}{4R}$, apoi $\sigma[A'B'I]$ și $\sigma[A'C'I]$. **5.** $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{4bc} \leqslant \frac{a^2}{4bc}$. **7.** Din $4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$ și teorema cosinusului se obține $b + c = 41$ și $bc = 420$.

Capitolul III

§ 1.

1. a) $\mathcal{C}(0, 1)$. b) Mulţimea punctelor situate în cadranul III şi pe semiaxa negativă a ordonatelor, $\{M(x, y) \mid x \leqslant 0, y < 0\}$. c) Mulţimea punctelor din interiorul unghiului format de semidreptele $\{P(x, y) \mid y = \sqrt{3}x, x < 0\}$ şi $\{P(x, y) \mid y = 0, x > 0\}$. d) $\{P(x, y) \mid x^2 + (y + 1)^2 \leqslant 4\}$, discul cu centrul în punctul $(0, -1)$ şi de rază 2. **2.** $z_1 = 5(\cos 0 + \sin 0)$, $z_2 = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$, $z_6 = 2\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$, $z_7 = \sqrt{13}(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, unde $\alpha = 2\pi - \operatorname{arctg} \frac{2}{3}$, $z_8 = \frac{1}{\cos a}(\cos a + i \sin a)$, dacă $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $z_8 = \frac{1}{|\cos a|}[\cos(a + \pi) + i \sin(a + \pi)]$, dacă $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. **3.** $|z_1| = 1$, $\operatorname{Arg} z_1 = \{-a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$; $|z_2| = 1$, $\operatorname{Arg} z_2 = \left\{\frac{\pi}{2} - a + 2k\pi \mid k \in Z\right\}$.

§ 2.

1. $8\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) = 8(1 + i)$. **2.** a) $|z| = 4^6$, $\arg z = 0$; b) $|z| = 2^3$, $\arg z = \frac{\pi}{2}$; c) $|z| = 2^8$, $\arg z = \frac{2\pi}{3}$; d) $|z| = 2^{12}$, $\arg z = 0$; e) $|z| = 2^{12}\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12}$, $\arg z = \pi$; f) $|z| = 1$, $\arg z = \pi$. **3.** 2^{60}; b) -1; c) $2^n \sin^n \frac{a}{2}\left[\cos \frac{n(\pi - a)}{2} + i \sin \frac{n(\pi - a)}{2}\right]$.
4. Relaţia dată se scrie $z^2 - 2 \cos a \cdot z + 1 = 0$, de unde $z_1 = \cos a + i \sin a$, $z_2 = \cos a - i \sin a = \cos(-a) + i \sin(-a)$, $\frac{1}{z_1} = \cos a - i \sin a$, $\frac{1}{z_2} = \cos a + i \sin a$, $z_1^n + \frac{1}{z_1^n} = z_2^n + \frac{1}{z_2^n} = 2 \cos na$.

§ 3.

1. a) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$; b) $\cos \frac{(2k + 1)\pi}{6} + i \sin \frac{(2k + 1)\pi}{6}$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; c) $\sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}\right)\right]$; d) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $-i$. **3.** $\varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$, $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} = \varepsilon_1^k$. **6.** Rădăcinile celor două ecuaţii sînt: $z_k = \cos \frac{2k\pi}{m} + i \sin \frac{2k\pi}{m}$, $z_h = \cos \frac{2k'\pi}{n} + i \sin \frac{2k'\pi}{n}$. Rădăcinile comune corespund valorilor lui k şi k', care satisfac egalitatea $\frac{2k}{m} = \frac{2k'}{n}$, sau $kn = k'm$. Deoarece $(m, n) = 1$ egalitatea are loc numai dacă k este un multiplu al lui m, deci numai $z_0 = 1$ este rădăcină comună.

§ 4.

1. a) 3, $\frac{3}{2}(-1 + i\sqrt{3})$; $-\frac{3}{2}(1 + i\sqrt{3})$; b) $\frac{5\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$; $\frac{5\sqrt{2}}{2}(-1 \pm i)$.

2. a) $z_1 = 2$, $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_3 = -1 - i\sqrt{3}$, $z_4 = 1$, $z_5 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_6 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

§ 5.

4. Dacă M_1, M_2 au afixele z_1, z_2, atunci imaginile M'_1, M'_2 au afixele $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$ și $M'_1M'_2 = |\bar{z}_2 - \bar{z}_1| = |\overline{z_2 - z_1}| = |z_2 - z_1| = M_1M_2$. **5.** Avem $\arg z_2 = \arg z_1 + \arg \alpha - 2k\pi (k = 0$ sau $k = 1)$. a) $(OM_1 = (OM_2 \Leftrightarrow \arg z_1 = \arg z_2 \Leftrightarrow \arg \alpha = 0$; b) $(OM'_1$ opus lui $(OM_2 \Leftrightarrow \arg z_1 = \arg z_2 \pm \pi \Leftrightarrow \arg \alpha = \pi$. **6.** Se consideră imaginile lui $z_2 - z_1$ și $z_3 - z_1$ și se folosește exerc. 5. **7.** Fie z afixul lui M; atunci $|z| \neq 1$. Luînd modulele celor doi membri ai egalității indicate și ținînd cont de $|\varepsilon^2 - \varepsilon| = |1 - \varepsilon^2| = |1 - \varepsilon| = \sqrt{3}$, se obține: (a) $|z - 1| + |z - \varepsilon| \geqslant |z - \varepsilon^2|$, (b) $|z - 1| - |z - \varepsilon| \leqslant |z - \varepsilon^2|$ și (c) $|z - \varepsilon| - |z - 1| \leqslant |z - \varepsilon^2|$, o egalitate putînd să aibă loc numai dacă imaginile lui $(z - 1)(\varepsilon^2 - \varepsilon)$ și $(z - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2)$ sînt coliniare cu O. Dar atunci am avea în virtutea exerc. 5, $(z - 1)(\varepsilon^2 - \varepsilon) = \alpha(z - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2)$, cu $\alpha \in \mathbf{R}$. Cum $\varepsilon^3 = 1$, $\varepsilon^2 = \bar{\varepsilon}$, ar rezulta $z(\bar{\varepsilon} - \varepsilon - \alpha + \alpha\bar{\varepsilon}) = \bar{\varepsilon} - \varepsilon - \alpha\varepsilon + \alpha$, deci $-z$ ar fi cîtul a două numere complexe conjugate în contradicție cu $|z| \neq 1$.

Exerciții recapitulative

2. b) $8 \cos^3 \frac{t}{2}\left(\cos \frac{3t}{2} + i \sin \frac{3t}{2}\right)$. **3.** $-1 - i$. **4.** Afixul $z = x + iy$ al celui de-al treilea vîrf satisface: $|z - 1| = |2 + 1 - 1| = \sqrt{2}$, $|z - 2 - i| = \sqrt{2}$, adică $(x - 1)^2 + y^2 = 2$, $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$. **5.** Notînd $z_k = r(\cos t_k + i \sin t_k)$, $k = 1, 2, 3$ și $t_1 + t_2 + t_3 = t$, din ipoteză rezultă $\sin t_1 + r \sin(t_2 + t_3) = 0$, adică $\sin t_1 + r \sin(t - t_1) = (1 - r \cos t)\sin t_1 - r \sin t \cos t_1 = 0$ și două relații analoage cu t_2, t_3 în loc de t_1. Aceste relații pot exista simultan numai dacă $1 - r \cos t = 0$, $r \sin t = 0$, deci $\sin t = 0$, $\cos t = 1$. $r = 1$.

Capitolul IV

§ 1.

1. Dacă $d \cap \alpha$ ar conține două puncte, atunci am avea $d \subset \alpha$ (teorema 2). **3.** Există puncte A, B, C, D, nesituate într-un același plan. Arătați prin reducere la absurd că dreptele AB și CD nu au punct comun! Dacă $d = d'$, concluzia este evidentă. Putem presupune, deci, că dreptele d, d', d'' sînt distincte și fie $d' \cap d'' = \{A\}$, $d \cap d'' = \{B\}$, $d \cap d' = \{C\}$. Dacă $A \in d$, atunci cele trei drepte au în comun punctul A. Dacă $A \notin d$, atunci, $B \neq A$, $C \neq A$ ceea ce împreună cu $d' \neq d'' \Rightarrow A$, B, C sînt trei puncte necoliniare și din teorema 2 rezultă că d, d', $d'' \subset (ABC)$. **6.** b) Fie $E \in (DAB) \cap (DBC) \cap (DCA)$; cum aceste plane sînt distincte, ele se taie două cîte două după dreptele DA, DB, DC. Rezultă $E \in DA$, $E \in DB$. Din $E \neq D$ ar rezulta $A, B \in ED$ în contradicție cu a). **7.** Arătați mai întîi că punctele E, F, G nu sînt coliniare și apoi că punctele P, Q, R aparțin planelor (ABC) și (EFG). **8.** Cinci. **9.** Alegeți o dreaptă d' astfel ca d și d' să nu fie conținute într-un plan. Considerați planele (dM) cu $M \in d'$.

§ 2.

1. Construim în planul α mediatoarea segmentului $[AB]$, pe care o intersectăm cu planul β. **3.** Punctul M trebuie să fie situat în planele α, (Ad_1), (Bd_2). Problema revine la exerc. 2.

§ 3.

1. Fie $\sigma = (\alpha A = (\alpha B$ şi $M \in (AB)$. Trebuie să arătăm că $M \in \sigma$, ceea ce revine la $[AM] \cap \alpha = \varnothing$. Presupunînd contrariul, există $P \in [AM] \cap \alpha$. Dar atunci $P \in [AB]$, deci $P \in [AB] \cap \alpha$, ceea ce nu este posibil. **4.** Fie de exemplu σ un semispaţiu deschis, β frontiera lui σ şi $d = \alpha \cap \beta$. Alegem punctele $A, B \in \alpha - d$ de o parte şi de alta a dreptei d. Atunci $[AB] \cap \beta \neq \varnothing$, deci A şi B sînt de o parte şi de alta a planului β, adică unul din aceste puncte, să zicem 4, se găseşte în σ. Se va demonstra că $\alpha \cap \sigma = (dA$. În acest scop se ia $M \in \alpha \cap \sigma$ şi se deduce că $[AM] \cap d = \varnothing$, ceea ce implică $M \in (dA$; se ia apoi $N \in (dA$ etc. **6.** Trei sau patru. **8.** Se va proceda prin reducere la absurd. **9.** d fiind muchia unghiului diedru, se vor distinge cazurile: $d \cap \alpha$ este punct, $d \cap \alpha = \varnothing$ şi $d \cap \alpha = d$. **10.** 1) Se aplică exerc. 4. 2) Folosiţi definiţiile interioarelor unui unghi şi unui unghi diedru. **11.** Se va arăta că $(MP \subset \text{Int. } \widehat{AMB}$, din care se va deduce că (AB) şi $(MP$ au un punct comun.

§ 4.

3. Numai în cazul unghiului diedru nul sau plat. **4.** b), d), e). **5.** Se iau punctele $P, Q \in \mathcal{M} \cup \sigma (P \neq Q)$ şi se disting cazurile: 1) $P, Q \in \mathcal{M}$; 2) $P \in \mathcal{M}, Q \in \sigma$. 3) $P, Q \in \sigma$. Veţi arăta că în fiecare caz $(PQ) \subset \mathcal{M}$. **9.** Fie tetraedrul $[ABCD]$ şi E mijlocul lui $[CD]$. Centrele de greutate G, G' ale triunghiurilor ACD, BCD sînt situate respectiv pe AE, BE. Arătaţi că AG', BG, EF sînt concurente, unde F este mijlocul lui $[AB]$. **11.** C şi D se află de o parte şi de alta a planului (ABM) (exerc. 11, § 3), deci acest plan intersectează segmentul (CD) într-un punct Q. Arătaţi că $M \in \text{Int } \widehat{AQB}$, ceea ce implică $(QM \cap (AB) = \{P\}$. **14.** Fie $\mathcal{M}$ reuniunea considerată şi $X, X' \in \mathcal{M}$, adică $X \in [PQ]$, $X' \in [P'Q']$, unde $P, P' \in \mathcal{M}_1$ şi $Q, Q' \in \mathcal{M}_2$. Trebuie să arătăm că $(XX') \subset \mathcal{M}$. Se aplică exerc. 12 segmentelor $[PP']$ şi $[QQ']$.

§ 5.

2. Duceţi printr-un punct al dreptei a paralela la dreapta d şi arătaţi că aceasta coincide cu a. **3.** Dacă $d \nparallel d'$, soluţia este unică: planul determinat de d şi paralela la d', dusă printr-un punct al lui d. Dacă $d \parallel d'$, există o infinitate de soluţii: orice plan ce trece prin d, cu excepţia lui (dd'). **4.** Un plan. **5.** Se duce prin dreapta întîi un plan paralel cu a treia (vezi exerc. 3), care se intersectează cu dreapta a doua. **6.** Se foloseşte proprietatea 1, apoi proprietatea 2. **9.** Fie A punctul, d dreapta şi α planul dat. Dacă $d \nparallel \alpha$, soluţia problemei este paralela prin A la dreapta $(Ad) \cap \alpha$. Dacă $d \parallel \alpha$, problema are o infinitate de soluţii sau nici una. **11.** Dreptele AA' şi BB' fiind coplanare, două cazuri sînt posibile: a) AA' şi BB' au un punct comun S; b) $AA' \parallel BB'$. În cazul a) veţi arăta că

$S \in CC'$, iar în cazul b) exercițiul 6 implică $AA' \parallel CC'$. **14.** În caz contrar, dreapta dată ar fi inclusă în primul plan. **15.** Presupuneți contrariul și folosiți teorema 3. **17.** În cazul $\alpha \nparallel \alpha'$, ducem printr-un punct al dreptei $\alpha \cap \alpha'$ o paralelă cu d și arătăm că aceasta este inclusă atît în α, cît și în α'. **18.** b) Două soluții cu excepția cazurilor $a = 0°$ sau $a = 90°$, cînd soluția este unică. **19.** O clasă de echivalență este formată dintr-un plan α și planele paralele cu α. **20.** nu. **21.** Notînd cu (AB) și $(A'B')$ cele două segmente, din exercițiul 13 rezultă că $AA' \parallel BB'$, deci $AA'B'B$ este un paralelogram. **22.** Prin cîte un punct al fiecărei drepte duceți paralele la cealaltă dreaptă dată. **24.** Un plan paralel cu planele date.

Exerciții recapitulative

6. a) $EF \parallel AC, HG \parallel AC$; b) o dreaptă paralelă cu d (respectiv un plan paralel cu α). **7.** Duceți prin A' o dreaptă paralelă cu d. **8.** Folosiți exercițiul precedent. Locul geometric este un plan paralel cu d și d'. **11.** a) o dreaptă care trece prin punctul $d \cap \alpha$, dacă acest punct există, respectiv o dreaptă paralelă cu d, dacă $d \parallel \alpha$. b) Un plan care trece prin $\alpha \cap \beta$, dacă $\alpha \cap \beta \neq \varnothing$; un plan paralel cu α, dacă $\alpha \parallel \beta$.

Capitolul V

§ 1.

1. Prin A se duc planele α, α', perpendiculare respectiv pe d, d'. Dacă $\alpha \neq \alpha'$, problema are o soluție unică: dreapta $\alpha \cap \alpha'$. Dacă $\alpha = \alpha'$, orice dreaptă conținută în α și trecînd prin A reprezintă o soluție. **4.** Folosind exercițiul 3, obținem trei drepte coplanare cu un punct comun, perpendiculare două cîte două, ceea ce este în contradicție cu unicitatea în plan a perpendicularei pe o dreaptă, printr-un punct dat. **6.** Fie $d, d' \perp \alpha$, $A' = \alpha \cap d'$, iar d'' paralela prin A' la d. Arătați că $d' = d''$. **10.** Perpendiculara pe (ABC) care trece prin centrul cercului circumscris triunghiului ABC. **13.** Se va arăta că piciorul perpendicularei din P pe (ABC) aparține fiecăreia din perpendicularele considerate. **14.** $2a$, $\frac{1}{2} a\sqrt{7}$. **15.** Un cerc în planul α cu diametrul $[AB']$, unde B' este proiecția lui B pe α. **16.** Un cerc situat în planul prin A perpendicular pe a, de diametru $[AA']$, unde A' este piciorul perpendicularei în A pe a. **19.** A fiind punctul și d, d' dreptele date, notînd cu α planul prin A perpendicular pe d', dacă $d \cap \alpha$ este un punct B, dreapta AB intersectează d și $AB \perp d'$. **22.** După cum distanța de la A la planul $\alpha > l$ sau $= l$ sau $< l$, locul geometric este respectiv un cerc, un punct sau mulțimea vidă. **27.** O' fiind piciorul perpendicularei din O pe (ABC), avem $\triangle OO'A \equiv \triangle OO'B \equiv \triangle OO'C$, deci $(O'A) \equiv (O'B) \equiv (O'C)$.

§ 2.

3. Luînd un punct M' astfel ca $A \in (MM')$, avem conform teoremei 1 $\widehat{B'AB} < \widehat{M'AB}$.
4. Proiectați un punct $A \in a$ pe planul feței (b, c) în A', deosebiți cazurile: 1) $A' \in \text{Int}\, \widehat{bc}$,

2) $A' \in \widehat{bc}$, 3) $A' \notin \text{Int } \widehat{bc} \cup \widehat{bc}$ şi folosiţi în fiecare caz exerciţiul 3. **6.** Duceţi o semidreaptă $[AB$, perpendiculară pe α, de aceeaşi parte faţă de α ca şi β'.

§ 3.

2. Se intersectează unghiul diedru $\widehat{\alpha'\beta'}$ cu un plan perpendicular pe muchia lui $\widehat{\alpha'\beta'}$, se construieşte bisectoarea unghiului format etc. **4.** În planul β, ducem prin Q o perpendiculară d' pe dreapta $\alpha \cap \beta$ şi demonstrăm că $d' \perp \alpha$. Din unicitatea perpendicularei printr-un punct pe un plan va rezulta că $d = d'$, deci $d \subset \beta$. **6.** Fie a şi b dreptele date şi $\alpha = (ab)$. Locul cerut se compune din două plane perpendiculare pe α care trec prin bisectoarele unghiurilor determinate de dreptele a şi b. **7.** Duceţi prin punctul de intersecţie al celor trei plane o dreaptă perpendiculară pe α şi arătaţi că aceasta este inclusă în celelalte două plane.

§ 4.

3. Fie $A^* = \text{pr}_\alpha A$, $O^* = \text{pr}_\alpha O$; se va arăta că $OA \perp (OO^*B)$ şi $O^*A^* \perp (OO^*B)$. **4.** Se va observa că raportul, în care un punct împarte un segment, se păstrează prin proiecţie. **7.** Se va folosi exerc. 4. **9.** Construiţi o dreaptă d care intersectează cele trei drepte date şi luaţi un plan perpendicular pe d. **10.** Există un plan perpendicular pe a care conţine dreapta d. **11.** Fie $[OA$, $[OB$, $[OC$ muchiile unghiului triedru şi α, β, γ cele trei plane proiectante. Putem admite că $\widehat{AOB}$ şi $\widehat{AOC}$ nu sînt unghiuri drepte. Perpendicularele din A pe planele, γ, β vor fi conţinute în (OAB) respectiv (OAC) şi vor intersecta OB, OC în cîte un punct B', C'. Folosiţi concurenţa înălţimilor în triunghiul $AB'C'$. **16.** Dacă $D = \text{pr}_{AB}O$, unghiul planelor (ABC) şi (OAB) are măsura $\varphi = m(\widehat{ODC})$ şi $\text{tg } \varphi = \frac{c}{OD} = \frac{c\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}$.

Exerciţii recapitulative

1. a) Deoarece AN este mediană în triunghiul isoscel ACD, $AN \perp CD$ şi analog $BN \perp CD$. Rezultă că $CD \perp (ABN)$ şi $CD \perp MN$, $CD \perp AB$. b) Din reciproca 1 a teoremei celor trei perpendiculare deducem că $D'M \perp AB$, de unde rezultă că $D' \in CM$. c) Dreptele DD', CC' şi MN se întîlnesc în ortocentrul triunghiului MCD. **2.** Consideraţi dreapta $\alpha \cap (AOB)$. **5.** 1) $\widehat{hk}$ este un unghi ascuţit; presupunînd problema rezolvată, fie $C = \text{pr}_{AM}B$ şi $B' = \text{pr}_\alpha B$. Putem construi un triunghi dreptunghic congruent cu ABC (căci cunoaştem măsura lui $\widehat{CAB}$ şi AB) şi apoi unul congruent cu $BB'C$. Trasăm în planul α cercul $\mathcal{C}(B', B'C)$ şi construim tangentele la acest cerc care trec prin punctul A. 2) Dacă $\widehat{hk}$ este obtuz, construim semidreapta opusă lui $(AM$. 3) Dacă $\widehat{hk}$ este un unghi drept, intersectăm planul α cu planul perpendicular pe AB, dus prin A. Problema are soluţie

dacă $m(\widehat{B'AB}) \leq m(\widehat{hk}) \leq 180° - m(\widehat{B'AB})$. **8.** Reuniunea a două drepte perpendiculare ce trec prin mijlocul lui $[AA']$, situate în planul mediator α al acestui segment (bisectoarele unghiurilor formate de proiecţiile lui d şi d' pe α). **9.** Dacă $N = pr_\alpha M$, $A = pr d_1 M$, $B = pr d_2 M$, din teorema celor trei perpendiculare rezultă că $OANB$ este un dreptunghi. Se aplică teorema lui Pitagora. **10.** Arătaţi că triunghiul VBC este isoscel şi consideraţi triunghiul VDE, unde $D = pr_{BC}V$ şi $E = pr_{AC}V$. **13.** Dacă $O = pr_{(ABC)}D$, $(AO) \equiv (BO) \equiv (CO)$, deci $AO = \dfrac{a}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}} \cdot d(D, (ABC)) = DO =$

$= a \operatorname{tg}\beta \Big/ \left(2\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)$. **14.** $AE = l\sqrt{\dfrac{1+\sin^2\beta}{2}}$, $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{2}\operatorname{tg}\beta$. **15.** $\operatorname{tg}\varphi = 2\operatorname{tg}\beta/\sqrt{3}$.

16. $l\sqrt{\dfrac{\sin^2\alpha - \sin^2\dfrac{\beta}{2}}{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\beta}{2}}}$, $\dfrac{l}{\cos\dfrac{\beta}{2}} \cdot \sqrt{\cos^2\dfrac{\beta}{2} - \cos^2\alpha}$. **17.** Cazul a). Dreptele BC, CA, AB taie planul α respectiv în L, M, N. Se duc prin L, M, N drepte paralele cu EF, FD, DE, care determină un triunghi $A'B'C'$. Dreptele AA', BB', CC' fiind coplanare două cîte două, sînt fie concurente într-un punct P, fie paralele. În primul caz P este soluţia problemei, în al doilea caz problema nu are soluţie. Cazul b). Una din dreptele BC, CA, AB este paralelă cu planul α; problema are soluţie numai dacă dreapta aceea este paralelă cu latura respectivă a triunghiului DEF, iar atunci există o infinitate de soluţii. **18.** Se intersectează BC, CA, AB, $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ cu planul α respectiv în L, M, N, L', M', N'. Laturile triunghiului DEF vor fi situate pe dreptele LL', MM', NN'.

Capitolul VI

§ 1.

1. Punctul M din spaţiu şi proiecţiile sale pe muchii aparţin planului perpendicular pe muchiile prismei, care trece prin M. **2.** $ABDE$ este un trapez, deci $AD \cap BE \neq \varnothing$. Se aplică ex. 5, de la Cap. IV, § 1. **3.** $18\sqrt{3}(\sqrt{73}+5)$. **4.** $a^2(4+\sqrt{3})$. **5.** a; $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}(1+\sqrt{13})$. **6.** 72. **7.** $ab(1+\sqrt{3})$. **8.** 240. **11.** Fie $[OM]$ diagonala prin O şi N mijlocul segmentului $[AB]$; $\triangle GON \sim \triangle GMC$, $k = \dfrac{1}{2}$. **12.** $m_{bazei} = \dfrac{d}{2}$, $m_{lat} = \dfrac{d\sqrt{2}}{2}$, aria paralel. $= \dfrac{d^2}{2}(1+2\sqrt{2})$. **13.** Fie cubul $[ABCDA'B'C'D']$. Distanţa dintre dreptele BD' şi $B'C'$ este distanţa dintre dreapta $B'C'$ şi planul $(BA'D')$. Perpendiculara din B' pe planul $(BA'D')$ intersectează

dreapta $A'B$ şi deci distanţa de la B' la $(BA'D')$ este înălţimea din B' a triunghiului $BB'A'$ şi este de $10\sqrt{2}$. **14.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **15.** $a\sqrt{7}$, $2a\sqrt{2}$, $\arcsin \frac{2\sqrt{7}}{7}$, 45. **16.** $\sqrt{a^2+b^2+ab}$, $\sqrt{a^2+b^2+3ab}$. **17.** Se arată pe baza teoremei celor trei perpendiculare că înălţimea triunghiului de secţiune corespunzător unei laturi, este perpendiculară pe planul feţei laterale care conţine această latură. **18.** $\triangle A'AB \equiv \triangle A'AD$ şi deci înălţimea din A' a triunghiului isoscel $A'BD$ trece prin punctul O de intersecţie a diagonalelor cubului. Deoarece $BD \perp AC$ rezultă $BD \perp (AA'C)$ etc. **19.** Fie paralelipipedul $[ABCDA'B'C'D']$ în care planul (ACC') este perpendicular pe planul bazelor. Se arată că BD este perpendiculară pe planul (ACC') şi deci şi pe dreapta ce uneşte centrele romburilor de la baze, de unde rezultă că paralelogramul $BB'D'D$ este dreptunghi. **20.** Se exprimă cosinusul unghiului în funcţie de lungimea muchiei bazei şi a diagonalei şi în continuare diagonala în funcţie de muchia bazei şi muchia laterală. **21.** Fie M_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, cele şase puncte şi G mijlocul lui $[AC']$. Arătaţi că $GM_i \perp AC$ şi $\triangle GM_{i-1}M_i \equiv \triangle GM_iM_{i+1}$. **22.** a) Dacă se notează $\{E\} = O'P \cap AC$, rezultă că $E \in (ABC) \cap (MO'P)$ şi $\{F\} = EM \cap (AB) \in (MO'P)$. G fiind intersecţia dintre dreapta $O'M$ şi dreapta ce trece prin mijloacele muchiilor $[AD]$ şi $[A'D']$, rezultă că $G \in (ADD') \cap (MO'P)$ şi că $\{N\} = PG \cap (A'D')$ şi $\{Q\} = O'N \cap (B'C')$ aparţin secţiunii care este deci pentagonul $MQNPF$; $FM \parallel NQ$ şi $NP \parallel MQ$. b) $[AP]$ fiind linie mijlocie în $OO'E$, $[AF]$ fiind linie mijlocie în OEM, avem $AF = \frac{a}{4}$ (O centrul bazei $ABCD$); $GM = a$, $NH = \frac{a}{3}$, $A'N = QC' = \frac{a}{6}$, unde H este mijlocul muchiei $[A'D']$. Proiecţia poligonului $FMQNP$ pe planul (ABC) este poligonul $AFMTS$, $\sigma[AFMTS] = \sigma[ABC] - \sigma[FBN] = \frac{5a^2}{16}$. Se determină măsura unghiului planelor $(MO'P)$ şi (ABC). Fie R piciorul perpendicularei din O pe FM. OR se determină scriind în două moduri $\sigma[OFM]$ şi $OR = \frac{a}{\sqrt{13}}$, $O'R = \frac{a\sqrt{14}}{\sqrt{13}}$, $\cos \widehat{ORO'} = \frac{1}{\sqrt{14}}$, $\sigma[FMQNP] = \frac{5a^2\sqrt{14}}{16}$. **23.** a) 30. b) $\frac{a\sqrt{13}}{2}$. **24.** $x \in (0, 2a)$, pentru ca secţiunea să fie diferită de mulţimea vidă. **25.** Se notează cu M mijlocul lui $[A'B']$ şi N mijlocul lui $[BC]$; secţiunea este rombul $ANC'M'$ de latură $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ şi diagonala $a\sqrt{3}$, $a\sqrt{2}$; $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$, $2a\sqrt{5}$. **26.** $\frac{a^2\sqrt{7}}{4}$.

§ 2.

1. a) da, b) da, c) nu, d) da, e) nu. **5.** $\frac{1}{2}(a\sqrt{b^2+4h^2} + b\sqrt{a^2+4h^2})$. **6.** Aplicînd teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile SAC şi SBD

rezultă $SA' = \frac{SA^2 + SC^2 - AC^2}{SC}$, $SD' = \frac{SD^2 + SB^2 - BD^2}{SB}$ şi aplicînd formula lungimii medianei rezultă $SA^2 + SC^2 = SB^2 + SD^2$, deci $\frac{SA'}{SD'} = \frac{SB}{SC}$. **8.** Se arată că înălţimea piramidei trece prin mijlocul ipotenuzei bazei (vezi exerc. 2). **9.** a) 48, b) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, c) $\sin\beta_1 = \frac{24}{\sqrt{601}}$, $\sin\beta_2 = \frac{24}{\sqrt{626}}$, $\sin\beta_3 = \frac{24}{\sqrt{626 - 25\sqrt{3}}}$. **10.** Fie piramida $[VABC]$, M un punct al bazei, A', B', C' punctele în care perpendiculara prin M pe (ABC) intersectează respectiv planele feţelor $[VBC]$, $[VAC]$, $[VAB]$ şi A'', B'', C'' proiecţiile lui M respectiv pe BC, AC, AB. $\frac{MA'}{MA''} = \frac{MB'}{MB''} = \frac{MC'}{MC''} = \frac{MA' + MB' + MC'}{MA'' + MB'' + MC''} = \operatorname{tg}\alpha$ unde α este măsura unghiului diedru format de o faţă laterală cu planul bazei. Deoarece $MA'' + MB'' + MC''$ este constantă, rezultă că $MA' + MB' + MC'$ este constantă. **13.** a) $3\sqrt{219}$, b) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, c) Fie M proiecţia lui B pe AV care coincide cu proiecţia lui F pe AV. Măsura unghiului diedru al feţelor $[VAB]$ şi $[VAF]$ este egală cu $m(\widehat{BMF})$; aplicînd teorema cosinusului în triunghiul BMF se obţine $\cos(\widehat{BMF}) = -\frac{59}{91}$. **14.** Fie O centrul bazei. Măsura unghiului diedru dintre planele (VAB) şi (VAC) este 60° şi deci $\sigma[VAO) = \sigma[VAB]\cos 60° = \frac{1}{2}\sigma[VAC] = q$. **15.** Se aplică teorema cosinusului în triunghiurile VDE, VEF, VDF; $\lambda = \frac{3a^2 - 2b^2}{2(a^2 - 2b^2)}$. **16.** $\arccos\frac{1}{3}$. **18.** $\operatorname{arctg}\frac{ad}{2S}$, unde $S = \sigma[BCD]$. **20.** $\frac{a}{3}$. **21.** $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$. **22.** $SA^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$, $SB^2 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}$, $SC^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$ cu condiţiile $a^2 < b^2 + c^2$, $b^2 < a^2 + c^2$, $c^2 < a^2 + b^2$, deci ABC triunghi ascuţitunghic. **23.** $\frac{a\sqrt{3b^2 - a^2}}{4}$. **24.** Distanţa de la vîrful piramidei la planul de secţiune $= \sqrt{q}\,I$, unde I este înălţimea piramidei. **25.** $\frac{5a^2\sqrt{2}}{16}$. **26.** $\frac{12}{7}$. **27.** $\frac{27\sqrt{6}}{4}$. **28.** $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$.

§ 3.

3. $15\sqrt{2}$, 30, $10\sqrt{5}$, $10\sqrt{7}$. **4.** $\frac{3\sqrt{7}}{4}$. **5.** $3(a+b)\sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$. **6.** $72\sqrt{3}$.

§ 4.

5. Din exerc. 4 rezultă $3f \leqslant 2m$, $3v \leqslant 2m$; se ţine cont de relaţia lui Euler. **6.** $m \geqslant 2v$, dacă am avea şi $2m \geqslant 2f$, din relaţia lui Euler s-ar putea deduce o condiţie. **7.** Se proiectează poliedrul pe un plan.

§ 5.

1. $a^3\sqrt{3}$. **2.** $4a^3\sqrt{3}$. **3.** Putem admite că $\alpha \cap P = \{A_1\}$; atunci $A_1 = B_1$. Fie $P' = [A_1B_2B_3 \dots B_nA_2A_3 \dots A_n]$, iar P'' poliedrul congruent cu P' care se obţine prin deplasarea muchiilor lui P' de-a lungul suporturilor lor astfel ca A_1 să ajungă în A_1'. Rezultă: $v(P) = v(P' \cup P) - v(P'') = v(P' \cup P - P'')$ şi $P' \cup (P - P'')$ este o prismă dreaptă cu aria bazei S şi înălţimea l. **4.** Secţionaţi paralelipipedul cu un plan perpendicular pe muchii şi folosiţi exerc. 3. **5.** $\sigma_l = 260$, $V = 400$, $d_1 = \sqrt{194}$, $d_2 = \frac{60}{13}$. **6.** $\frac{13\sqrt{2}}{3}a^3$; $a^2(10 + 8\sqrt{3})$. **7.** Prin C se duce o paralelă la AB pe care se ia punctul A' în acelaşi semispaţiu cu A faţă de planul (BCD) astfel ca $(A'C) \equiv (AB)$. Analog, prin B se duce o paralelă la CD şi se ia punctul D' în acelaşi semispaţiu cu D faţă de planul (ABC) astfel ca $(BD') \equiv (CD)$. Distanţa dintre planele (ABD') şi $(A'CD)$ este cea mai scurtă distanţă dintre muchiile $[AB]$ şi $[CD]$ şi este înălţimea prismei $[ABD'A'CD]$. Volumul acestei prisme este $\frac{1}{2}$ din volumul prismei patrulatere cu baza paralelogram, pentru care $[A'D]$ este diagonală şi $[A'C]$, $[CD]$, laturi. Pe de altă parte, această prismă se descompune în tetraedrele de volume egale: $[ABCD]$, $[ACDA']$ şi $[DBAD']$. **8.** $V = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 13 \text{ cm}^3 \approx 1{,}078 \text{ m}^3$. **9.** $\frac{189}{19} \approx 9{,}95$. **10.** a) Se consideră piramidele cu bazele $[HMV]$, $[HAB]$ şi vîrfurile N, C; comparînd ariile bazelor şi înălţimile, se obţine: $v[NHMV] = \frac{1}{4}v[CHAB] = \frac{1}{8}v[HABCD]$; b) 30. **11.** a) Fie H proiecţia lui A' pe planul (ABC) şi M proiecţia lui A' pe AB. $AM = HM = \cos x$, $A'M = c \sin x$; b) $\cos \alpha = \frac{HM}{A'M}$. **12.** a) $V = \frac{a^3}{12\sqrt{2}}$; b) $DE = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, $\alpha = \beta = 90°$.

Exerciţii recapitulative

1. a) $ab + \frac{1}{2}[a\sqrt{b^2 + h^2} + b\sqrt{a^2 + h^2} + h(a + b)]$; b) trapez dreptunghic, $\frac{3}{8}a\sqrt{b^2 + h^2}$; c) $\frac{1}{8}abh$. **2.** a) $\frac{a^2}{2} + ab + \frac{a\sqrt{a^2 + 2b^2}}{2}$; b) $45°$; c) $a^2b^3\sqrt{2}/(a^2 + 2b^2)^{3/2}$.

3. a) Se arată că $BC \perp (SAN)$; b) $AD = \frac{AS}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$ și $BD = a$, deci ABD dreptunghic și isoscel; analog ACD, deci $ABDC$ este pătrat; c) $SN = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ și se arată că triunghiurile ABS și ACS sînt dreptunghice; aria secțiunii este $a^2\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{3}\right)$.

5. Fie $h = bc/\sqrt{b^2 + c^2} \cdot V = abc - \frac{1}{2} \frac{ab^2x}{\sqrt{b^2 - x^2}}$, dacă $x \in [0, h)$; $V = \frac{1}{2x} ac^2 \sqrt{b^2 - x^2}$, dacă $x \in (h, b]$. 6. a) $V = \frac{2x(a^2 - x^2)}{3}$; b) $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}\sqrt{a^2 - x^2}}{2a}$, $\cos\alpha = \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}$.

7. $\frac{a}{\sqrt{6}}$. 9. Dreptele AN, BP, VO sînt concurente două cîte două, deci au un punct comun S (Cap. IV, § 1, ex. 5) și la fel rezultă că $S \in MQ$. b) $AB \parallel MQ \parallel FC$, $(MC) \equiv (QF)$, $\triangle BMC \equiv \triangle AQF$, $(BM) \equiv (AQ)$. c) M este dreapta de intersecție a planelor (VBE) și (VAC), adică locul geometric este $[VT]$, unde T este mijlocul lui $[AC]$. d) $[QM]$ este linie mijlocie în triunghiul CVF, deci $QM = a$ și $ABMQ$ este dreptunghi. Dacă se notează cu h_1 respectiv h_2 înălțimile lui $ABMQ$ și $QMNP$, atunci $\frac{\sigma[QMNP]}{\sigma[ABMQ]} = \frac{1}{2} \frac{h_2}{h_1}\left(1 + \frac{PN}{a}\right)$; $\frac{h_2}{h_1} = \frac{SP}{SB} = \frac{VP}{VB} = \frac{PN}{a}$ (VO este bisectoare în triunghiul VBP). Notînd $\{F\} = AB \cap CD$, avem $CF = a$; ducînd prin C o paralelă la MN, se observă că $\frac{VN}{VD} = \frac{1}{3}$, deci $\frac{VP}{VB} = \frac{VP}{VE} = \frac{1}{3}$ și $\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{3}$. Rezultă că raportul cerut este egal cu $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$. 10. b) $42a^2 + 4a^2\sqrt{3}$; c) $\operatorname{arcctg} \sqrt{2}$; d) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Capitolul VII

§ 1.

1. $\frac{a\sqrt{a}}{4}\pi$. 2. 3. 3. 12π; $4\sqrt{2}\,\pi$. 4. a) 10; b) 28π. 5. $2\pi a^2(1 + 2\pi)$; $2\pi a^3$. 6. $150\sqrt{3}$. 8. $a^2(1 + \sqrt{2})\,\pi$; $\frac{a^3\pi}{2}$. 9. 10. 10. 160. 11. $120\,\pi$ cm^2; $300\,\pi$ cm^3. 12. $V \approx 43{,}96$ dm^3, $m \approx 496{,}75$ kg. 13. 384 kg.

§ 2.

1. $\frac{h\sqrt{2}}{2}$. **2.** $\frac{5}{4}\sqrt{651}$. **3.** VAB fiind secţiunea axială şi $[VQ]$ înălţimea conului, $m(\widehat{AVB}) = 90°$ şi $VO = OA = OB$, deci $I = R$; $G = 3\sqrt{2}$, $R = I = 3$. **4.** 96π. **5.** $1\,024\pi$. **6.** 136π; 320π. **7.** Tetraedrul fiind $[VABC]$, conul are ca bază discul înscris în triunghiul ABC şi acelaşi vîrf V; $\frac{a^3\sqrt{6}}{108}\pi$. **8.** $\approx 62{,}80$ m². **9.** Făcînd o secţiune axială în con care conţine o diagonală a cubului, pentru muchia x a cubului se obţine: $\frac{x\sqrt{2}}{2R} = \frac{h - x}{h}$, de unde $x = \frac{2\,Rh}{2R + h\sqrt{2}}$. **10.** $\frac{3Rh}{3R + h\sqrt{3}}$. **11.** Se obţine un corp format din două conuri, care au aceeaşi bază; $4\,800\pi$; $1\,320\,\pi$. **12.** 65π cm², 100π cm³.

§ 3.

4. 584π. **5.** $1\,500\pi$. **6.** $R = 2r$, $R - r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\frac{7a^3\sqrt{2}}{12}\pi$. **7.** Raza discului de secţiune $= 12$, distanţa cerută $= 4$. **8.** $54{,}6\pi$; $93{,}6\pi$. **9.** $\sqrt{2}\,(R^2 - r^2)\pi$; $\frac{R^3 - r^3}{3}\pi$. **10.** 48π; $\frac{112\sqrt{3}}{3}\pi$. **11.** 160π; 136π.

§ 4.

1. Fie $M, N \in [\mathcal{S}(O, r)]$; deoarece discul $[\mathcal{S}(O, r)] \cap (OMN)$ este o mulţime convexă, rezultă că $[MN]$ este inclus în acest disc, deci şi în corpul sferic $[\mathcal{S}(O, r)]$. **2.** Simetricul A' al unui punct $A \in \mathcal{S}(O, r)$ faţă de O satisface condiţia $r = OA = OA'$. **3.** Fie d un diametru al sferei, $M \in \mathcal{S}(O, r)$ şi N simetricul lui M faţă de d; se va arăta că $ON = r$. **4.** Fie cele două cercuri $\mathcal{C}(O_1, r_1, \alpha_1)$ şi $\mathcal{C}(O_2, r_2, \alpha_2)$, avînd punctele P, Q comune. Atunci $\alpha_1 \cap \alpha_2 = PQ$. Arătaţi că perpendicularele ridicate în O_1 şi O_2 respectiv pe α_1 şi α_2 au un punct comun şi acesta este egal depărtat de punctele celor două cercuri. **5.** Fie $A, B \in \mathcal{S}(O, r)$ care nu sînt coliniare cu O. Prin punctele A, B, O trece un singur (plan OAB), deci un cerc mare prin A, B coincide cu $(ABC) \cap \mathcal{S}(O, r)$ şi astfel el este determinat în mod unic. **6.** $3\sqrt{3}$. **7.** 3; **8.** 238π; 782π. **9.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}R$. **10.** $\frac{256}{81}\pi$. **11.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}R$; **12.** 192π; 768π. **13.** 676π; $\approx 2\,902{,}7\pi$. **14.** $\frac{21R^2}{2}\pi$; $\frac{7R^3}{2}\pi$ **15.** $\frac{2\,000}{3}\pi$ cm³. **16.** a) $\frac{\pi h^2(2R - h)}{3}$, $\pi h\sqrt{2R(2R - h)}$; c) $h = R(\sqrt{5} - 1)$.

1. $\frac{a^3}{4}$. 2. 4. 3. $\frac{R\sqrt{2}}{2}$; $R\sqrt{2}$. 4. $\frac{5\sqrt[3]{4}}{2}$. 5. a) Notînd cu $2p$ perimetrul secţiunii axiale a conului C şi exprimînd aria acestei secţiuni în două moduri obţinem: $p \cdot r = G \sin\alpha \cdot G \cos\alpha$. Ţinînd cont de $p = g(1 + \sin\alpha)$, se află generatoarea $G = r\,\frac{1 + \sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$. Deci $\sigma_l(C) = \frac{\pi r^2(1 + \sin\alpha)^2}{\sin\alpha\cos^2\alpha}$. b) Rezultă ecuaţia trigonometrică $(1 + \sin\alpha)^2 = 3\cos^2\alpha$, de unde $\sin\alpha = -1$, care nu corespunde, sau $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, deci $\alpha = \frac{\pi}{6}$. 6. $162\pi l$. 7. a) r fiind raza bazei mici a trunchiului de con T, $\frac{2R-d}{2R} = \frac{r}{R}$, de unde $r = R - \frac{d}{2}$; $v(T) = \frac{\pi d}{12}(12R^2 - 6Rd + d^2)$. b) Condiţia este îndeplinită dacă $g = R + r$ (g este generatoarea trunchiului de con). Dar $g^2 = d^2 + (R - r)^2$ deci $g = \frac{d\sqrt{5}}{2}$; $d = R(\sqrt{5} - 1)$. 8. $\sigma_t(\text{corp}) = \sigma_l(\text{cil}) + 2\sigma_l(\text{tr. con}) + 2\sigma_l(\text{con}) = 6\pi a^2\sqrt{3}$; $v(\text{corp}) = v(\text{cil}) + 2v(\text{tr. con}) - 2v(\text{con}) = \frac{9\pi a^3}{2}$. 9. $\frac{16\pi R^2}{3}$; $\frac{26\pi R^3}{9}$. 10. a) Notînd cu h_1 şi h_2 distanţele de la O la bazele $[AB]$ şi $[DC]$, din $\triangle AOB \sim \triangle COD$ avem $\frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{b}$ şi cum $h = h_1 + h_2$ rezultă $h_1 = \frac{ah}{a+b}$ şi $h_2 = \frac{bh}{a+b}$. b) $V_1 = \frac{\pi h^2}{3}(2a + b)$, $V_2 = \frac{\pi h^2}{3}(a + 2b)$ şi cum $a > b$ rezultă $V_1 > V_2$. 11. Fie $x = d(O, \alpha) \geqslant d(O, \beta)$. Atunci $d(O, \beta)$ este $h - x$ sau $x - h$ după cum O se află între planele α, β sau în exteriorul lor; în primul caz $h - x \leqslant x$ adică $x \geqslant \frac{h}{2}$, aşadar, în orice caz $x \in \left[\frac{h}{2}, R\right)$. Din $2\pi Rh = \pi(r_1^2 + r_2^2)$, $r_1^2 = R^2 - x^2$ şi $r_2^2 = R^2 - (h - x)^2$ rezultă $f(x) = 2x^2 - 2hx + h^2 + 2Rh - 2R^2 = 0$. Deoarece minimul lui f se obţine pentru $x = \frac{h}{2}$ şi $f\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2}(h^2 + 4Rh - 4R^2)$, $f(R) = h^2 > 0$, problema admite o soluţie unică dacă $f\left(\frac{h}{2}\right) \leqslant 0$ sau $h \leqslant 2R(\sqrt{2} - 1)$; dacă $h > 2R(\sqrt{2} - 1)$ problema nu are soluţie. Soluţia unică este $x = \frac{1}{2}\left(d + \sqrt{4R^2 - 4Rh - h^2}\right)$. 12. $R(\sqrt{5} - 2)$; $7 - 3\sqrt{5}$. 13. a) $10\sqrt{2 + \sqrt{2}}$; b) $\frac{500\pi(\sqrt{2} + 3)}{3}$. 14. Notînd cu x distanţa de la vîrful conului

la baza superioară a cilindrului C şi cu y raza cilindrului, putem scrie $\frac{y}{R} = \frac{x}{h}$, de unde $y = \frac{R}{h} x$; înălţimea cilindrului este $h - x$, deci $\sigma_t(C) = \frac{2\pi R}{h^2}(R - h)x^2 + 2\pi R x$; studiem această funcţie la intervalul (O, h).

Probleme recapitulative

3. Intersecţia lui $[ABCD]$ cu paralela la BD care trece prin mijlocul lui $[AC]$. **5.** $\frac{1}{3}$. **6.** $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S \sin\alpha \sin\beta}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}}$. **7.** $S = \frac{a^2}{18}(3\sqrt{3} - \pi)$. **8.** a) Se observă că $\cos A = -\cos(B + C)$, se scrie membrul stîng sub forma $\sin^2 B + \sin^2 C$ şi se aplică teorema sinusurilor; b) $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ etc.; d) dacă punctul $A' \in (BC)$ este unul din punctele de tangenţă ale cercului înscris în triunghi, atunci $BA' = r \cdot \operatorname{ctg}\frac{B}{2}$. **9.** a) Membrul stîng al egalităţii se scrie succesiv: $2R(\cos A + \cos B + \cos C) = 2R\left(1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) = 2R\left(1 + \frac{r}{R}\right)$. b) se arată că $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{p}{R}$ şi $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1 + \frac{r}{R}$. **10.** Prin rezolvări de sisteme de ecuaţii se obţin $A(a, b)$, $B(a + 1, b + 1)$ şi $C(a + 2, b + 4)$; deci triunghiul are laturile de lungimi $\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$. Se calculează apoi: $A = \arccos\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $B = \pi - \arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $C = \arccos\frac{7\sqrt{2}}{10}$. **11.** a) Dacă B' este piciorul înălţimii din B, din triunghiul ABB', se obţine $AB' = c\cos A$. Relaţia rezultă din triunghiul AHB' în care $\mu(\widehat{HAB'}) = \frac{\pi}{2} - C$. b) Membrul stîng se scrie succesiv: $4R^2(\sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C) = 2R^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 8R^2 \sin A \sin B \sin C$. **12.** Dacă $AI \cap \mathcal{C}(O, R) = \{A, D\}$ şi $OI \cap \mathcal{C}(O, R) = \{F, G\}$, atunci $IG \cdot IF = IA \cdot ID$ şi $IG \cdot IF = (R + OI)(R - OI) = R^2 - OI^2$.

Apoi se observă că $IA = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}$, $\mu(\widehat{DIB}) = \frac{A+B}{2} = \mu(\widehat{DBI})$, $DI = BD = 2R \sin \frac{A}{2}$ (triunghiul OBI fiind isoscel). Aşadar $IA \cdot ID = 2Rr$. **13.** Din $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$, se obţine succesiv: $r = 2R \sin \frac{A}{2} \left(\cos \frac{B-C}{2} - \cos \frac{B+C}{2}\right)$, $2R \sin^2 \frac{A}{2} - 2R \cos \frac{B-C}{2} \sin \frac{A}{2} + r = 0$. Rezultă că $4\left(R^2 \cos^2 \frac{B-C}{2} - 2Rr\right) \geqslant 0$. **14.** $2 \cos\left[n\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right]$. **15.** Se foloseşte: $(z-1)(z^n + z^{n-1} + \ldots + 1) = z^{n+1} - 1$. **16.** $t = \frac{z+1}{z-1}$, $t^n = 1$, $z = -\mathrm{i} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n}$, $k \in \mathbf{Z}$. **24.** Fie $\widehat{abc}$ unghiul triedru $A \in a$ şi O vîrful său. Se construiesc într-un plan unghiurile adiacente $\widehat{a'b'}$, $\widehat{b'c'}$, $\widehat{c'a''}$ cu vîrful comun O', congruente respectiv cu $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$ şi punctele $A' \in a'$, $A'' \in a''$ pentru care $(OA) \equiv (O'A') \equiv (O'A'')$. 1) Dacă $m(\widehat{ab}) + m(\widehat{bc}) + m(\widehat{ca}) < 180°$, se consideră $M' \in b' \cap (A'A'')$, $N' \in c' \cap (A'A'']$ şi punctele cerute M, N se determină astfel ca $(OM) \equiv (O'M')$, $(ON) \equiv (O'N')$. 2) Dacă $m(\widehat{ab}) + m(\widehat{bc}) + m(\widehat{ca}) \geqslant 180°$, $M = N = O$. **25.** Cel mult 6. **30.** Fie AB muchia unghiului diedru, iar C, D celelalte vîrfuri ale tetraedrului. Proiectaţi C şi D pe AB şi pe semiplanul bisector. **33.** Dreptele AM, BN descriu respectiv planele (Ad_1), (Bd_2) a căror intersecţie este locul cerut. Deoarece planul α taie (Ad_1), (Bd_2) după dreptele paralele d_1, d_2, se deduce că $(Ad_1) \cap (Bd_2)$ este o dreaptă paralelă cu d_1 sau mulţimea vidă. **34.** Se proiectează A, B, C, D în A', B', C', D' pe α şi se observă că $\frac{AL}{BL} = \frac{AA'}{BB'}$. **36.** Se va arăta că piciorul H al perpendicularei din D pe (ABC) este ortocentrul triunghiului ABC. Notînd cu C_1 punctul diametral opus lui C în cercul circumscris lui ABC, se observă că $AHBC_1$ este un paralelogram deci $AH^2 + BC^2 = BC_1^2 + BC^2 = CC_1^2$. **39.** $(ABC) \perp OM$. **40.** $\frac{h}{6}[ab + a'b' + (a+a')(b+b')]$. **43.** Sfera este tangentă bazelor în centrele lor de greutate; $18R^3\sqrt{3}$, $6R^3\sqrt{3}$. **45.** $1{,}026\pi$ m^3. **46.** a) $\frac{32}{3} R^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \alpha$; b) $4R^2 \sin 2\alpha$; c) 60. **47.** $\frac{a}{2}(2+\sqrt{3})$, $\frac{a}{2}(2-\sqrt{3})$, $\frac{\pi a^2}{6}(12 + 7\sqrt{3})$. **48.** Sfera de diametru AB, fără A şi B. **53.** Perechile de cercuri

circumscrise triunghiurilor VAB, $VA'B'$; VBC', $VB'C'$; VCA, $VC'A'$ sînt tangente. Din exerc. 52 rezultă că cele două sfere au acelaşi plan tangent în O. **55.** $\frac{2S}{bc}(b^2+c^2)$, unde $S=\sigma[ABC]$. **56.** a) $\frac{2\pi}{7}a^2\sqrt{3}$; b) $\frac{8}{3}\pi a^2(5-2\sqrt{6})$; c) $5-2\sqrt{6}$. **57.** $4\pi RR_1$. **58.** Centrele sferelor sînt vîrfurile unui tetraedru regulat; $h=r+$ $+\frac{2}{3}r\sqrt{6}+r\sqrt{3}$. **59.** Să se arate că se aplică formula (8) de la Cap. VII, § 4; $\frac{\pi h^3}{6}$.

Cuprins

